

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren, fortgeführt
durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E.
Wiedemann, P. Drude, W. Wien, M. Planck

Der ganzen Reihe 437. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD, W. WEIZEL

Herausgegeben von

E. GRÜNEISEN
Münster/L.

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 1. April 1948

Inhalt

	Seite
Gerhard Ruthemann, Heidenheim: Diskrete Energieverluste mittelschneller Elektronen beim Durchgang durch dünne Folien. (Mit 20 Abbildungen)	119
Gerhard Ruthemann, Heidenheim: Elektronenbremsung an Röntgen-niveaus. (Mit 3 Abbildungen)	126
F. Frey, Heidelberg: Über die Druckzerstörung des ZnS-Cu-Phosphors durch Mahlen und ihre Folgeerscheinungen. (Mit 14 Abbildungen)	140
Werner Schaaffs, Berlin-Siemensstadt: Über einen vermuteten Effekt des magnetischen Feldes auf die Ultraschallgeschwindigkeit. (Mit 1 Abbildung)	146
W. Jellinghaus und H. Schlechtweg, Düsseldorf: Zur Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung von Nickel. (Mit 4 Abbildungen)	141
Friedrich Fraunberger, Rothalmünster/Niederbayern: Über einen neuen Nachweis von spontaner Magnetisierung oberhalb der Curietemperatur. (Mit 2 Abbildungen)	170
B. Honigmann, K. Molière und I. N. Stranski, Berlin-Dahlem: Berichtigung zu der Arbeit „Über den Gültigkeitsbereich der Thomson-Gibbschen Gleichung“. (Annalen der Physik, 6. Folge, Bd. 1, Heft 4/5, S. 181)	182
M. v. Laue, Göttingen: Nochmals zur Thermodynamik der Supraleitung	183
Herbert Buchholz, Braunschweig: Die axialsymmetrische elektromagnetische Strahlung zwischen konfokalen Drehparabolen bei verschiedenen Anregungsarten. (Mit 3 Abbildungen)	185
F. A. Fischer, Bredeneek bei Preetz (Holstein): Über die Totalreflexion von ebenen Impulswellen. (Mit 5 Abbildungen)	211

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn *Geh.-Rat Prof. Dr. E. Gruneis*, (16) Marburg/L., Mainzer Gasse 33, oder Herrn *Prof. Dr. F. Möglich*, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den Zitate wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Bezugspreis je Band zu 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden, RM. 34.—. Porto: Inland RM. 1.20. Preis eines Einzelheftes RM. 5.20, eines Doppelheftes RM. 10.40. Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 2, HEFT 3-4 * 1948

Diskrete Energieverluste mittelschneller Elektronen beim Durchgang durch dünne Folien¹⁾

Von Gerhard Ruthemann

(Der Fakultät für Naturwissenschaften und Ergänzungsfächer der Technischen Hochschule Danzig eingereichte Dissertation, 1. Teil)

(Mit 20 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Mit der verschärften magnetischen Halbkreisemethode hohen Auflösungsvermögens wurden die Energieverluste von 2 bis 8 ekVolt-Elektronen nach dem Durchgang durch sehr dünne Folien (100—500 Å Dicke) von Kollodium, Al_2O_3 , Be, Al und Ag untersucht. Es ergab sich:

1. In den Geschwindigkeitsspektren fanden sich für jede Folienart eines oder mehrere ausgeprägte Intensitätsmaxima, entsprechend einem oder mehreren besonders wahrscheinlichen Energieverlusten. Wenn zwei oder mehrere Maxima auftraten, so waren die zugehörigen Energieverluste ganze Vielfache des ersten besonders wahrscheinlichen Verlustes. Diese diskreten Energieverluste betrugen bei: Kollodium 21,4, bei Al_2O_3 22,3, bei Be 19,0, bei Al 14,7 und bei Ag 22,6 eVolt, sie waren unabhängig von der Primärenergie. Die ihnen entsprechenden Intensitätsmaxima der Geschwindigkeitsspektren waren bei Kollodium, Ag und Al_2O_3 verhältnismäßig breit, bei Be und vor allem jedoch bei Al sehr schmal und scharf.

2. Bei Zunahme der Schichtdicke nahm der mittlere Energieverlust der Elektronen durch Erhöhung der Zahl der unelastischen Zusammenstöße zu. Entsprechend stieg in den Spektren die Elektronenzahl bei den Mehrfachen des diskreten Verlustes relativ zu der beim Einfachen des diskreten Verlustes an.

Mit steigender Primärenergie nahm die mittlere Energieabgabe der Elektronen durch eine Verringerung der Zahl der unelastischen Zusammenstöße ab.

Es wurden Geschwindigkeitsspektren von solchen Elektronen aufgenommen, die in der Folie Richtungsänderungen von 0 bis 4° erlitten hatten. Mit zunehmendem Streuwinkel stiegen die mittleren Energieverluste an bei gleichzeitiger Abnahme der Intensität.

A. Aufgabenstellung und Einleitung

Die Geschwindigkeitsverluste von Elektronen beim Durchgang durch Materie sind in zahlreichen früheren Arbeiten untersucht worden. Neben gasförmigen Streuzentren hat man auch häufig dünne Folien als streuende Materie benutzt. Nachdem durch die Versuche von P. Lenard²⁾ das Gebiet erschlossen worden war,

¹⁾ Ein kurzer Auszug mit vorläufigen Meßergebnissen erschien als „Kurze Originalmitteilung“ in den „Naturwissenschaften“ 29, 648 (1941).

²⁾ P. Lenard, Ann. Physik 56, 256 (1895).

hat E. Leithäuser³⁾ als erster Energieverluste festgestellt. Später haben unter anderem im Bereich kleinerer Geschwindigkeiten (1—12 ekVolt) A. Becker⁴⁾ und O. Klemperer⁵⁾, bei mittleren Geschwindigkeiten (25—125 ekVolt) R. Whiddington⁶⁾, H. M. Terrill⁷⁾, R. Baginski⁸⁾, A. Becker⁹⁾ und K. Gentner¹⁰⁾ und bei schnellen β -Strahlen (130—1100 ekVolt) W. Wilson¹¹⁾, O. v. Baeyer¹²⁾ und P. White und G. Millington¹³⁾ die Geschwindigkeitsverluste beim Durchgang durch dünne Folien gemessen. Bei all diesen Experimenten kommt die Geschwindigkeitsänderung der Teilchen durch vielfache Streuung zustande. Meist wird der häufigste Energieverlust gemessen, der sich durch das statistische Zusammenwirken vieler Elementarprozesse, die mit einem Energieverlust verbunden sind, ergibt. Er wird mit einiger Annäherung beschrieben durch die Thomson-Whiddingtonsche Formel: $U_0^2 - U_m^2 = b \cdot d$, wobei U_0 die Primärenergie (eVolt) und U_m die häufigste Energie nach dem Durchgang durch die Folie bedeuten, d ist die Schichtdicke und b ist eine charakteristische Materialkonstante. Bei verschiedenen Materialien verhalten sich diese Konstanten annähernd proportional der Dichte.

Bedeutend seltener sind Energieverlustmessungen, die das Ergebnis einfacher Streuvorgänge zu isolieren suchen. So haben R. Whiddington¹⁴⁾, E. Rudberg¹⁵⁾ und L. J. Haworth¹⁶⁾ Geschwindigkeitsspektren von langsamen Elektronen (bis zu wenigen 100 eVolt) aufgenommen, die an Metallen und Metalloxyden unter einem Winkel von 90° reflektiert worden waren. In den Spektren fanden sich bevorzugte Energieverluste, die für das Material charakteristisch waren. Sie waren indessen nicht unabhängig von der Primärenergie.

In verschiedenem Zusammenhang interessieren jedoch besonders die Energieverluste, die schnellere Elektronen erleiden; dabei vor allem diejenigen, die bei Streuprozessen mit kleinen Richtungsänderungen — die weitaus überwiegen — eintreten. Verschiedentlich wurde vermutet, daß solche Geschwindigkeitsänderungen bei Elektronenbeugungsuntersuchungen — M. v. Laue¹⁷⁾ —, bei Elektroneninterferenz- und Elektronenmikroskopuntersuchungen — B. v. Borries und E. Ruska¹⁸⁾ — eine merkliche Rolle spielen.

Zur genaueren Kenntnis dieser Erscheinungen ist es erwünscht, die Feinstruktur dieser Geschwindigkeitsverluste kennenzulernen, also in dem Geschwindigkeitsspektrum den Bereich zwischen dem maximal vertretenen Energieverlust und der ursprünglichen Energie. Es wäre weiter erwünscht, sich auch hier dem Idealfall der Untersuchung des Energieverlustes im Elementarprozeß zu nähern. Zu

³⁾ E. Leithäuser, Ann. Physik **15**, 283 (1904).

⁴⁾ A. Becker, Ann. Physik **84**, 779 (1927).

⁵⁾ O. Klemperer, Z. Physik **34**, 532 (1925).

⁶⁾ R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. London (A) **86**, 360 (1912).

⁷⁾ H. M. Terrill, Phys. Rev. **22**, 101 (1923).

⁸⁾ R. Baginski, Dissertation Kiel (1924).

⁹⁾ A. Becker, Ann. Physik **78**, 209 (1925).

¹⁰⁾ K. Gentner, Ann. Physik **31**, 407 (1938).

¹¹⁾ W. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **84**, 141 (1910).

¹²⁾ O. v. Baeyer, Physik Z. **13**, 485 (1912).

¹³⁾ P. White und G. Millington, Proc. Roy. Soc. London (A) **120**, 701 (1928).

¹⁴⁾ R. Whiddington, Proc. Leeds Philos. and Lit. Soc. **1**, 162 (1927).

¹⁵⁾ E. Rudberg, Physic. Rev. **50**, 138 (1936).

¹⁶⁾ L. J. Haworth, Physic. Rev. **48**, 88 (1935).

¹⁷⁾ M. v. Laue, Der feste Körper. (Zürcher Vorträge) 1938, S. 152.

¹⁸⁾ B. v. Borries und E. Ruska, Ergebn. exakt. Naturwiss. **19**, 263 (1940).

diesem Zwecke müßten einmal sehr dünne Folien und weiterhin eine Versuchsanordnung mit sehr großem Auflösungsvermögen, die bei einer Primärenergie von mindestens einigen eVolt die Messung von Energieverlusten von einigen eVolt erlaubt, benutzt werden. Es ist durchaus möglich, daß die Elektronen im Elementarprozeß quantenhafte Energieverluste von der Größe der optischen Anregungsspannungen, der Ionisierungsspannungen oder bei Metallen von der Austrittsarbeit erleiden.

Es lag nahe, die hier entwickelte Halbkreisermethode großen Auflösungsvermögens¹⁹⁾ zu diesen Untersuchungen zu benutzen. — Gegenüber der für solche Messungen ebenfalls oft angewandten Gegenfeldmethode hat die Halbkreisermethode den Vorteil, daß nicht Integralkurven, sondern gleich Differentialkurven gemessen werden. — Praktisch wurde so das Gebiet von 2 bis 8 eVolt zugänglich. Die untere Grenze wurde durch die mit der Primärenergie abnehmende Durchschlagskraft der Elektronen, die obere durch das begrenzte Auflösungsvermögen der Versuchsanordnung gegeben.

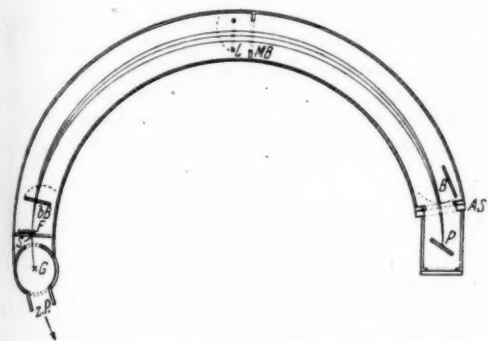
B. Untersuchungsmethodik

1. Versuchsanordnung

a) Vakuumapparatur

Es wurde die früher beschriebene verschärfte magnetische Halbkreisermethode benutzt. Bei ihr ist das Magnetfeld, das durch zwei mäßig lange koaxiale Spulen erzeugt wird, auf einen ringförmigen Bereich zwischen den Spulen beschränkt. Durch Überlagerung eines Zusatzfeldes wird die natürliche Unschärfe der Halbkreisermethode vermindert und das Auflösungsvermögen entsprechend gesteigert¹⁹⁾.

Gegenüber der früheren Anordnung wurden folgende Änderungen vorgenommen (Abb. 1—4):



- z. P. = Pumpleitung
- G = Glühdraht
- S = Spalt
- F = Folie
- bB = bewegliche Aperturblende
- L = Leuchtschirm
- MB = Mittelblende
- B = Abdeckblende
- AS = Auffängerschiff
- P = Photoplatte

Der mittlere Krümmungsradius der Elektronen betrug 17,5 cm

Abb. 1. Strahlengang

Als Quelle (vgl. Abb. 1 und 2), die durch die Zylinderlinsenwirkung des Magnetfeldes abgebildet wird, wird jetzt ein fest eingebauter Spalt (0,09 mm breit und 1,5 mm hoch) benutzt, der parallel zur Spulenachse gerichtet ist. Parallel zum Spalt ist ein Glühfaden (0,1 mm Durchmesser) ausgespannt, der sich 27 mm

¹⁹⁾ H. Voges und G. Ruthemann, Z. Physik 114, 709 (1939).

vor dem Spalt befindet; er ist nicht mehr von einem Anodenzylinder umgeben, als Anode wirkt jetzt der geerdete Kathodenmantelschliff (40 mm lichte Weite).

Durch die Anordnung von Glühfaden und Spalt ist ein schmales Bündel gegeben (Öffnungswinkel $0,4^\circ$). Der Glühfaden wurde wenig geheizt, so daß man sich bereits bei viel kleineren als den normalen Anodenspannungen einwandfrei im Sättigungsgebiet befand, eine wesentliche Verbreiterung des Bündels durch Raumladungswirkungen trat deshalb nicht in Erscheinung.

Die Glühkathode (Abb. 2) war starr an einer Einführung befestigt, die durch einen Federungskörper und drei Stellschrauben mit dem Kathodenkernschliff verbunden war, so daß die Kathode während des Betriebes verschoben werden konnte. Das schmale Strahlbündel konnte so beliebig in die Rohrmittte bzw. nach innen oder außen gelenkt werden.

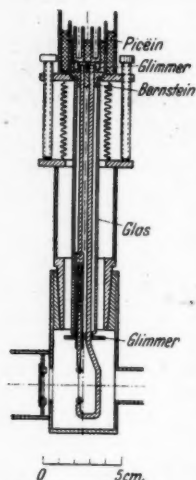


Abb. 2. Kathodenschliff (Querschnitt)

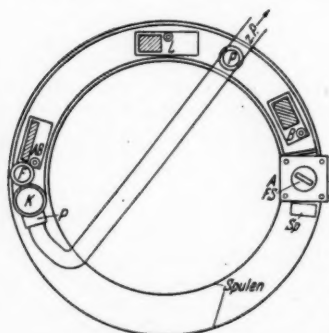
Hinter dem Spalt befand sich in einem Abstand von 1 bis 2 mm der Folienträger (vgl. Abb. 3 und 4). Er bestand aus einer Scheibe von 16 mm Durchmesser mit 8 bzw. 12 kreisförmigen auf einem Kreise angeordneten Löchern (Durchmesser 2,5 bzw. 1 mm). Durch einen von außen drehbaren Schliff konnten die verschiedenen Löcher des Folienträgers am Spalt vorbeigedreht werden. Auf der Folienträgerscheibe konnte eine zweite



Abb. 3. Folienträgerschliff. Querschnitt.
 F = Folienträgerscheibe in Ansicht

mit gleicher Lochanordnung befestigt werden. Dadurch konnte erreicht werden, daß der Elektronenstrahl nacheinander 2 Folien (eventuell verschiedener Dicke) durchqueren mußte.

Hinter dem Folienträger befand sich eine durch einen Schliff drehbare Scheibe (Abstand von der Folie 28 mm), die zwei verschiedene rechteckige Blendenlöcher (Höhe 4 mm, Breite 0,4 bzw. 1,2 mm) besaß. Durch diese als Aperturblende



- P = Pumpstutzen
 - K = Kathodenschliff
 - F = Folienträgerschliff
 - AB = Aperturblendenschliff mit Fenster
 - L = Leuchtschirmschliff mit Fenster
 - B = Abdeckblendenschliff mit Fenster
 - A = Auffänger
 - FS = Führungsscheibe
 - Sp = Spiegel und Fernrohr
- Mit „Spulen“ sind die innere und äußere Feldspule gekennzeichnet.

Abb. 4. Versuchsanordnung in Aufsicht

dienende Scheibe konnte wahlweise ein 1° bzw. 3° breiter Öffnungskegel aus dem in der Folie stark gestreuten Elektronenbündel herausgeblendet werden. Später wurde mit schmalen Aperturblenden gearbeitet, die einen Öffnungswinkel von $0,5^\circ$ bzw. 2° zuließen.

In der Rohrmittle diente eine Scheibe von 40 mm Durchmesser mit einem rechteckigen Loch von 5 mm Höhe und 26 mm Breite als Blende zum Abfangen solcher Elektronen, die sonst beim Weiterlaufen das Kupferrohr gestreift hätten.

Davor war ein durch einen Schliff drehbarer Leuchtschirm von 27 mm Breite und 15 mm Höhe mit einem Loch von 3 mm Höhe und 24 mm Breite angebracht.

Kurz vor dem Rohrende befand sich eine weitere durch einen Schliff drehbare Scheibe, die die Photoplatte beim Justieren abdeckte.

Am Rohrende war durch einen Planschliff ein Auffänger (Abb. 6) aufgesetzt, der die Photoplatte enthielt. Die 60 mm hohe und 20 mm breite Platte, die durch eine Gummidichtung ausgewechselt werden konnte, befand sich in einem Plattenhalter, der durch einen Schliff gehoben und gesenkt werden konnte. Vor dem Halter war eine feste Blende angebracht, die das Aufnahmeformat auf 5 mm Höhe bei 20 mm Breite begrenzte. Die Anordnung ließ damit Energieverluste bis zu 9% von der Primärenergie messen, praktisch wurde aber meist nur ein Bereich bis 6 oder 7% benutzt und ausgewertet. Auf eine Platte konnten nacheinander bis zu 10 Aufnahmen gemacht werden. Am unteren Ende des Plattenhalters war ein Glasleuchtschirm befestigt, der zum Justieren durch ein Glasfenster mit einem Fernrohr über einen Spiegel beobachtet werden konnte.

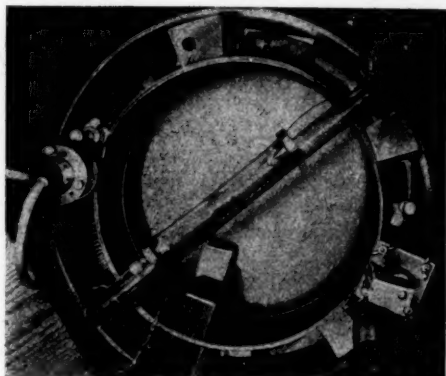


Abb. 5. Versuchsanordnung von oben gesehen



Abb. 6.
Auffänger im
Querschnitt

b) Feldstrom

Der Feldstrom wurde einer großen Akkumulatorenbatterie entnommen und durch Vorschalten entsprechender, fest eingestellter Abgriffe von einem Widerstandsgitter (Bauart Schniewind) auf die gewünschte Stärke reduziert. Mit Schiebewiderständen war die erforderliche Konstanz des Feldstromes auf $\frac{1}{4} \text{‰}$ während der Dauer einer Aufnahme (bis zu 5 Minuten) nicht erzielt worden.

c) Hochspannungsanlage

Die Herstellung einer genügend — auf mindestens $\frac{1}{2} \text{‰}$ — konstanten Hochspannungsquelle hat erhebliche Schwierigkeiten verursacht. Versuche mit einer

Hochspannungsdynamomaschine für Gleichstrom und einem Wechselstrom-generator, deren Motoren und Erregung aus einer Akkumulatorenbatterie betrieben wurden, führten nicht zu befriedigendem Ergebnis. Die erforderliche Spannungskonstanz auf mindestens $\frac{1}{2} \text{ ‰}$ war damit nicht zu erzielen.

Schließlich diente das gewöhnliche Wechselstromnetz als Spannungsquelle und die Hochspannung wurde mit der Greinacher-Schaltung gleichgerichtet. Die Unterdrückung der Spannungsschwankungen des Netzes wurde durch Anwendung zweier Methoden gleichzeitig erreicht.

Zur Grobregelung der langsamen Schwankungen wurde die Primärspannung für den Transformator einer Spannungsteilerschaltung entnommen, bei der der Spannungsteilerstrom (der groß war gegen den Primärstrom des Transformators) durch Vorschalten von Eisenwasserstoffwiderständen auf etwa $\pm 1\%$ konstant gehalten wurde, damit auch die Primärspannung des Transformators.

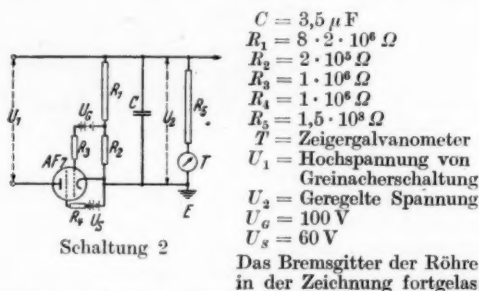


Abb. 7. Schaltskizze der Glättungsschaltung zur Feinregulierung der Spannungsschwankungen

Die Feinregelung und die Regelung der schnellen Schwankungen wurde durch Röhrenschaltungen bewerkstelligt. Eine erste Schaltung befriedigte nicht, da die verwandte Röhre auf die Dauer die hohe Anodenspannung (gleich der Spannung des Versuchsrohres) nicht aushielt.

Bei der schließlich zufriedenstellenden Schaltung wird ein Parallelstromkreis zu der zu glättenden Spannungsquelle durch einen Hochohmwiderstand und eine Pentode geschlossen. Ein kleiner Teil des Spannungsabfalls an dem Hochohmwiderstand wird abgegriffen, eine (unbelastete) Anodenbatterie etwa gleicher Spannung entgegengeschaltet und an das Gitter gelegt. Steigt die Spannung der Greinacher-Schaltung, so bekommt das Steuergitter ein gegen die Kathode stärker negatives Potential und die Anodenspannung der Pentode steigt entsprechend. Die Regelung ist um so besser, je höher der Verstärkungsfaktor der Röhre ist. Es wurde deshalb eine Röhre mit großem Innenwiderstand und großer Steilheit (AF 7) benutzt.

Bei periodischen Netzschwankungen bis zu $\pm 10\%$ von einer Frequenz von etwa einer Schwingung in der Sekunde blieb bei Anwendung der Grobregelung und der zweiten Feinregelungsschaltung die Spannung an der Versuchsanordnung auf weniger als $\frac{1}{3} \text{ ‰}$ konstant, wie durch Leuchtschirmbeobachtung festgestellt wurde.

d) Schrägstellung der Photoplatte

Während die hier benutzte Sonderform der Halbkreisemethode früher die Erhöhung des Auflösungsvermögens nur für einen Teil der damals benutzten 17 mm breiten Platte ergab, mußte das große Auflösungsvermögen jetzt für die ganze Plattenbreite (20 mm) angestrebt werden.

Das wurde erreicht durch Schrägstellung der Photoplatte gegen die Ebene, die durch Spalt und Spulenachse gegeben ist (vgl. Abb. 1). Diese Schrägstellung war nötig, da das hier benutzte Feld ja etwas inhomogen ist.

Die günstigste Plattenstellung wurde experimentell ermittelt. Hinter den Glühdraht wurde ein eckiges Wehnelt-Blech gebracht; dadurch gelang es, durch den Spalt drei schmale Elektronenbündel zu senden, zwischen denen jeweils ein Winkel von etwa 2° eingeschlossen war. Diese Strahlenbündel wurden auf dem Mittelleuchtschirm und ihre Vereinigung auf dem Leuchtschirm am Rohrende in der Ebene der Photoplatte beobachtet (vgl. die schematische Darstellung des Strahlenganges auf Abb. 1).

Wegen der vier vorhandenen Variationsmöglichkeiten (die Platte konnte schräg gestellt, der Abstand der Platte vom Auffängerschiff konnte um einige Millimeter geändert werden, das Verhältnis der Spulenströme wurde in geringen Grenzen geändert und auch der Bandstrom) war diese Justierung sehr zeitraubend. Die günstigste Plattenstellung trat bei Feldverhältnissen ein, die in gutem Einklang mit den früher ausgemessenen Feldern waren. Dabei war die Platte gegen die durch Spalt und Spulenachse gegebene Ebene um 35° geneigt.



Abb. 8.
Wirkungsweise
des Wehnelt-
Blechtes

Der Grund für die Schrägstellung der Platte läßt sich in einfacher Weise überlegen (siehe Abb. 1): Es seien 3 von einer punktförmigen Quelle ausgehende Elektronenbündel einheitlicher Energie gegeben, die sich nach Durchlaufen eines Halbkreises wieder vereinigen. Das eine verläuft nach Durchlaufen eines Viertelkreises in der Rohrmitte, eines innen und eines außen. In Abb. 9 ist über diesen Bündeln (ausgezogene Linien) die Feldstärke im Ringgebiet aufgetragen. Betrachten wir nun 3 weitere Bündel

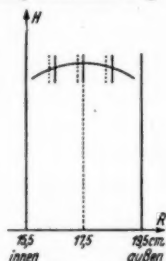


Abb. 9. Skizze zur
Schrägstellung der
Platte

von Elektronen, die eine etwas geringere Energie haben, so werden sie stärker gekrümmt und laufen deshalb weiter innen (in der Zeichnung links, gestrichelte Linien). Vergleichen wir jetzt die Feldstärken, so ergibt sich, daß das innere Bündel der langsameren Elektronen in einem Gebiet geringerer Feldstärke verläuft als sein schnelleres Nachbarbündel, das mittlere Bündel der langsameren Elektronen durchläuft ein Feld praktisch gleicher Größe, das äußere energieärmere Elektronenbündel durchläuft ein Gebiet größerer Feldstärke als das energiereichere Nachbarbündel. Das innere Bündel wird also zu wenig gekrümmt ist also nach Durchlaufen des Halbkreises zu weit außen und das äußere zu weit innen, das heißt, der Schnittpunkt der drei Teilstrahlen liegt für Elektronen geringer Geschwindigkeit, die sich weiter innen als die Ringmitte vereinigen, vor der „Halbkreis-ebene“ (das ist die Ebene, die durch Spalt und Spulenachse gegeben ist). Eine entsprechende Überlegung zeigt, daß der Schnittpunkt von Bündeln größerer Geschwindigkeit hinter dieser Ebene liegt. Dies ist in Einklang mit der experimentell ermittelten günstigsten Plattenstellung.

e) Photomaterial

Es wurden verschiedene Plattensorten auf ihre Brauchbarkeit für die Aufnahme in dem hier verwendeten Spannungsbereich untersucht. Die besten Ergebnisse wurden mit Agfa-Kontrast-Platten erzielt. Agfa-Schumann-Platten-rapid waren unter 5 ekVolt zwar empfindlicher, aber weniger feinkörnig. Harte Schumann-Platten (Agfa) zeigten sich in dem hier untersuchten Geschwindigkeitsbereich gegenüber der Agfa-Kontrast-Platte nicht vorteilhafter.

Allen Platten gemeinsam waren die von der geringen Eindringtiefe dieser weichen Strahlen herrührenden Sättigungserscheinungen schon bei verhältnis-

mäßig geringen Schwärzungen (vgl. Abb. 11). Die Schwärzungskurve (Schwärzung als Funktion des Produktes $I \cdot t$) stieg nur bis zur Schwärzung 0,1 bis 0,3 — nach der Primärenergie —, nahezu linear an, um dann abzubiegen und schließlich einen nahezu horizontalen Verlauf anzunehmen, die einzige Ausnahme hiervon machten Mimosadiapositivplatten extra-hart älterer Emulsion, die Jodsilber enthielten, aber jetzt nicht mehr hergestellt werden.

f) Einfluß der Feldinhomogenität

Die Inhomogenität des Feldes bedingt eine Abweichung der Dispersion von derjenigen, die man nach den Formeln für die normale Halbkreisemethode berechnet. Aus den früheren Feldausmessungen¹⁹⁾ läßt sich der Einfluß der Inhomogenität abschätzen. Für die normale Halbkreisemethode (homogenes Feld) berechnet man die Dispersion zu: $\Delta U = U_0 \cdot \frac{2\Delta R}{R}$ als Näherungsformel für $\Delta R < R$. (Durch Benutzung dieser Näherungsformel wird der in eVolt ausgedrückte Absolutwert der Verzögerung ΔU um $\Delta U/4 U_0$ zu groß angegeben, das macht hier bei den größten mit dieser Anordnung zu messenden Energieverlusten bis zu 2,2% aus.) In den weiter unten folgenden graphischen Darstellungen wurde die Näherungsformel benutzt, während in den Tabellen über die diskreten Werte das quadratische Glied berücksichtigt worden ist. —

Für den Fall einer quadratischen Abnahme der Feldstärke von dem mittleren Ringdurchmesser nach innen und außen läßt sich der Einfluß der Inhomogenität exakt berechnen. Diese Abhängigkeit lag praktisch vor, die Abweichungen davon waren erheblich kleiner als die Meßgenauigkeit. Als Bezugspunkt wurde die Feldstärke am äußersten Rande des normalerweise benutzten Bereiches in 8 mm Abstand von der Ringmitte gewählt, sie war hier 1,39% kleiner als in der Ringmitte. Betrachtet man jetzt 3 Strahlen, die von der Quelle — dem Spalt — genau tangential austreten, aber infolge verschiedener Energie auf der Photoplate genau in Ringmitte und 7 bzw. 8 mm weiter außen auftreffen, so verläuft der Mittelstrahl ständig in einem Gebiet der vollen Feldstärke, während die beiden äußeren Strahlen in schwächere Felder hinauslaufen. Im Mittel ist das durchlaufene Feld für den 7-mm-Strahl um 0,33% und für den 8-mm-Strahl um 0,43% schwächer als für den Mittelstrahl. Wäre dieser Abfall nicht vorhanden (normale Halbkreisemethode), so berechnete man für die in 7 und 8 mm Abstand von der Mitte eintreffenden Strahlen einen Energieunterschied von 5,47% voneinander (bei einem Krümmungsradius von 183 mm für den äußeren Strahl.) Da aber die mittlere Feldstärke für den äußeren dieser beiden Teilstrahlen 0,10% kleiner ist als für den inneren, folgt, daß seine Energie um 0,20% kleiner ist, als der Ausdruck für das homogene Feld erwarten ließe. (Aus der Grundgleichung für die Halbkreisemethode: $H \cdot R = \frac{m \cdot v}{e}$ ergibt sich

durch Einführung von $e \cdot U = \frac{m}{2} v^2$ und Umformung die Gleichung: $U = \text{const} \cdot H^2 R^2$, also ist die Änderung von U bei festgehaltenem R doppelt so groß als die von H .) Die Dispersion ($2\Delta R/\Delta U$) ist also gegenüber dem homogenen Felde um 3,7% (nämlich um $0,20/5,47 \cdot 100$) vergrößert. Am inneren Rande des benutzten Bereichs ist die Dispersion entsprechend um 3,7% kleiner als im homogenen Felde. In der Ringmitte ist die Dispersion gleich der für das homogene Feld berechneten.

Der Einfluß der Feldinhomogenität auf die Dispersion zeigt sich bei der Aufnahme von Intensitätsmarken (vgl. den Abschnitt B 3: Meßmethodik), bei denen bei festem Magnetfeld die Primärenergie in Schritten von 10 bis 20 Volt durch Gegenschalten einer Anodenbatterie um insgesamt 150 Volt vermindert wurde. (Das Spulenfeld und die Beschleunigungsspannung wurden so aufeinander abgestimmt, daß die schnellsten Elektronen als eine „Linie“ an einer bestimmten Stelle in der Nähe des äußeren Plattenrandes abgebildet wurden.) Diese Intensitätsmarken dienten mittels ihrer Lage zugleich zur Kontrolle der Spannungsmessung. Bei den kleinsten Primärenergien dehnten sich diese

Intensitätsmarken über die gesamte Plattenbreite aus, während sie sich bei den höheren Beschleunigungsspannungen mehr und mehr am äußeren Plattenrande zusammendrängten. (Die Dispersionsformel der Halbkreisemethode ergibt für den Abstand zweier verschieden schneller Elektronengruppen voneinander auf der Photoplatte: $2\Delta R = \Delta U \cdot R_0/U_0$. Bei festem ΔU — in unserem Fall 150 Volt — und konstantem R_0 ist also der Abstand der Elektronengruppen umgekehrt proportional der Primärenergie der schnelleren Elektronengruppe.) Infolgedessen war die Korrektur für die Feldinhomogenität bei großen Spannungen bei dem konstanten Energieunterschied von 150 Volt merklich größer, als bei kleinen Primärenergien, da bei diesen die Meßmarken sich über beide Plattenhälften erstreckten, in denen das Korrektionsglied verschiedenes Vorzeichen hat. Ohne Berücksichtigung dieser Korrektur wurde bei hohen Primärenergien der Energieunterschied, der aus den Abständen der Intensitätsmarken berechnet wurde und der Differenzspannung von 150 Volt entsprechen mußte, zu groß gemessen, wie es die obigen Überlegungen verlangen. Bei Berücksichtigung der Korrektur konnte kein merklicher Gang der aus den Photometerkurven ermittelten Differenzspannung mit der Primärenergie mehr festgestellt werden. Damit wurde die Größe des Einflusses der Feldinhomogenität auf die Dispersion bestätigt.

2. Meßgenauigkeit

Bei der Beurteilung der Meßgenauigkeit für die Größe der diskreten Energieverluste sind 4 Faktoren zu beachten, die systematische Meßfehler hervorrufen können.

1. Die Beschleunigungsspannung, die in die Formel zur Berechnung des Energieverlustes eingeht, wurde mit einem Zeigergalvanometer unter Vorschalten von Rundfunkwiderständen gemessen. Die Gesamtanordnung wurde geeicht unter Benutzung eines Normalinstrumentes (Hartmann u. Braun-Präzisions-Vielfachinstrument, 0,1%-Fehlerklasse). Der Meßfehler überschreitet die Grenze von $\pm 0,5\%$ nicht.

2. In die Bestimmungsgleichung für den Energieverlust geht weiterhin der Krümmungsradius der unverzögerten Elektronen ein. Dieser wurde auf ± 1 mm gemessen, was einem Fehler von $\pm 0,6\%$ entspricht.

3. Die Auswertung der Aufnahmen erfolgte über die Photometerkurven; das Vergrößerungsverhältnis des Photometers und die ungleichmäßige Ausdehnung des Photometerpapiere sind infolgedessen weitere Fehlermöglichkeiten. Der Einfluß beider, vor allem die ungleichmäßige Papierausdehnung, wurde zu $\pm 0,5\%$ ermittelt.

4. Die Inhomogenität des Feldes wurde bei den Werten in den Tabellen und im Text ebenfalls berücksichtigt. (Bei den Energieverlustkurven wurde auf die Berücksichtigung des Einflusses der Feldinhomogenität verzichtet.) Sie macht am Rande des normalerweise benutzten Plattenstreifens 3,7% aus (vgl. S. 120), am äußersten Plattenrande würde sie entsprechend 4,5% betragen, und zwar sind am äußeren Plattenrande (bei größtem Krümmungsradius) die für das homogene Feld berechneten Energieunterschiede zu verkleinern, am inneren Plattenrande entsprechend zu vergrößern, in der Ringmitte (was bei richtiger Justierung der Plattenmitte entspricht) ist die Korrektur null. Da die Größe der Feldinhomogenität nur auf $\pm 20\%$ und der mittlere Krümmungsradius auf ± 1 mm genau gemessen werden konnte, kann durch die Feldinhomogenität ein Meßfehler von $\pm 1\%$ hervorgerufen werden.

Diese vier systematischen Fehlerquellen, die die Meßwerte beeinflussen können, ergeben im ungünstigsten Falle eine Meßunsicherheit von $\pm 2,6\%$.

3. Methodik der Intensitätsmessung

Vor Beginn der eigentlichen Aufnahme wurden in demselben Spannungsbereich ohne Folie Intensitätsmarken auf die Platte gedruckt. (Dazu wurde eines oder zwei der Löcher in der Folienträgerscheibe vom Häutchen befreit bzw. ohne Häutchen gelassen.) Bei geringem, konstantem Emissionsstrom (einige Zehntel μA) wurden mit verschiedenen Belichtungszeiten einige „Linien“ photographiert, dabei wurde die Beschleunigungsspannung von Linie zu Linie durch Gegenschalten von einer Anodenbatterie (150 Volt) in Schritten von 10, 15 oder 20 Volt vermindert. Dann wurde durch Drehen des Folienträgerschliffes ein mit einer Folie überspanntes Loch vor den Quellschliff gebracht und mit wesentlich höherer Emission (6–30 μA) auf den nächsten Streifen der Platte eine Aufnahme mit Folie gemacht. (Belichtungszeit 10 Sekunden bis 5 Minuten, je nach Foliendicke und Beschleunigungsspannung). Abb. 10 gibt einen Abzug einer solchen Aufnahme wieder.



Bei Kollodium wurden teilweise zwei Folien übereinander verwandt; wurden dabei auf die Trägerscheiben verschieden dicke Häutchen gespannt, so konnten gleichzeitig drei verschiedene Schichtdicken untersucht werden. (Wobei die größte Schichtdicke durch Überlagerung des dünnen und dicken Häut-

Abb. 10. Abzug einer Aufnahme in natürlicher Größe
Platte Nr. 38. Folie: Beryllium. Von unten nach oben: 2 Intensitätsmarkenreihen und darüber 3 Spektren bei 4,1 kVolt. Dann eine Intensitätsmarkenreihe und 3 Spektren bei 7,7 kVolt. Die Belichtungszeiten betrugen (von rechts nach links): 4, 7, 10, 15, 25, 40, 60, 10 und 7 Sek. bei allen Intensitätsmarkenreihen. Die Gegenspannungen der Anodenbatterie betrugen von rechts nach links: 0, 15, 30, 50, 70, 90, 110, 130 und 150 Volt

chens zustande kam.) Die Aufnahmen wurden bei 2 bis 8 kVolt gemacht und dann mit einem selbstregistrierenden Mikrophotometer die Schwärzungen auf den Platten ausgemessen. Ein Vergleich von Elektronenintensitäten wurde stets unter Benutzung der Schwärzungskurve vorgenommen. Diese Schwärzungskurven wurden ermittelt aus den Photometerkurven der Intensitätsmarken. (Dabei wurde, wie bei Elektronen allgemein üblich, das Bunsen-Roscoesche Gesetz als erfüllt angenommen, d. h. es wurde von den Intensitätsmarken, die bei verschiedenen Belichtungszeiten aufgenommen wurden, auf verschiedene Intensitäten bei gleicher Belichtungszeit geschlossen.) Auf eine Platte wurden jeweils 9–10 Aufnahmen gemacht, die Auswertung von Intensitäten erfolgte stets nur über die Schwärzungskurve, die bei derselben Spannung (wenn man von der Änderung um maximal 150 Volt bei einer Gesamtspannung von 2 bis 8 kVolt absieht) und auf derselben Platte aufgenommen war. Deshalb war es nicht nötig, auf genau gleiche Entwicklung der verschiedenen Platten zu achten. (Agfa-Kontrast-Platten wurden normalerweise 6 Minuten in Rodinal, Verdünnung 1:20 bei 18° Celsius entwickelt.)

Die Schwärzungskurven wurden teilweise noch durch folgendes Verfahren nach H. B. Dorgelo²⁰⁾ kontrolliert: Es wurden zwei Spektren mit Folie unter völlig gleichen Bedingungen aufgenommen, die sich lediglich in der Belichtungszeit um einen bekannten Faktor, z. B. 2, unterschieden. Wenn man dann die

²⁰⁾ H. B. Dorgelo, Physik. Z. 26, 756 (1925).

Schwärzungen zweier entsprechender Punkte verglich, so mußten auf der Schwärzungskurve die zugehörigen Intensitäten sich stets wie 2:1 verhalten, was sich auch befriedigend bestätigte.

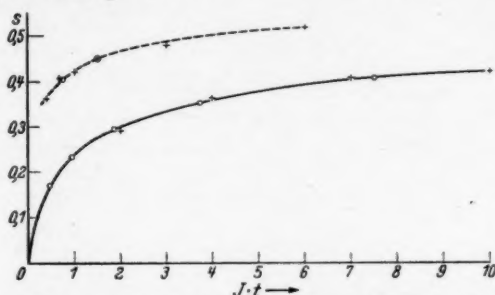


Abb. 11. Schwärzungskurve einer Agfa-Kontrast-Platte bei 6,4 ekVolt.

Entwickelt 6 Min. in Rodinal 1:20. Die gestrichelte Kurve ist Fortsetzung der ausgezogenen bei 10mal größeren Abszissenwerten. + = Meßpunkte von Intensitätsmarken; ○ = Punkte nach Dorgelo-Verfahren; ⊕ = Anschlußpunkt für Dorgelo-Verfahren.

4. Herstellung der Schichten

Untersucht wurden Schichten von Kollodium, Aluminiumoxyd, Beryllium, Aluminium und Silber.

Die Kollodiumhäutchen wurden in üblicher Weise hergestellt durch Ausbreiten eines Tropfens Kollodium in Amylacetatlösung auf destilliertem Wasser, nach dem Verdunsten des Lösungsmittels Auffangen des Häutchens auf einem Träger, vgl. W. Trenktrög²¹⁾.

Die Aluminiumoxydschichten stellte mir Herr Dr. G. Hass freundlicherweise zur Verfügung. Sie wurden durch elektrolytische Oxydation von auf Glas aufgedampften Aluminiumbelegungen hergestellt. Die Dickenangaben für die verschiedenen Schichten verdanke ich ebenfalls Herrn Dr. Hass. Die Oxydhäutchen wurden nach einer der z. B. bei Evans²²⁾ beschriebenen Methoden abgelöst.

Die Herstellung der Berylliumfolien geschah durch Aufdampfen des Metalls auf dünne Kollodiumhäutchen, sie wurden entweder mit Kollodiumunterlage untersucht oder das Kollodium vor dem Einbringen der Folie in das Versuchsrohr in Amylacetat weggelöst. In beiden Fällen ist mit einer merklichen Oxydation des Berylliums zu rechnen.

Die ebenfalls aufgedampften Aluminiumschichten wurden entweder auf Kollodium untersucht oder auf Steinsalz aufgedampft und dann auf destilliertem Wasser abgelöst, hierbei oxydierte das Aluminium zwar, jedoch war die Dicke der Oxydschicht erheblich geringer als die der Kollodiumträgerhäutchen. Das wurde aus den Geschwindigkeitsspektren geschlossen. Der „Untergrund“ war bei Aufnahmen mit Kollodiumunterlage stärker ausgeprägt als bei freitragenden Schichten. Die Kollodiumunterlagen, die bedampft wurden, mußten dicker gewählt werden als die freitragenden Häutchen, da die dünnsten Schichten beim Bedampfen zerstört wurden. Dieselbe Methode konnte beim Beryllium nicht an-

²¹⁾ W. Trenktrög, Dissertation Kiel (1923).

²²⁾ U. R. Evans, Korrosion, Passivität und Oberflächenschutz von Metallen. 1939. S. 55ff.

gewandt werden, da die Schicht bei diesem Metall beim Ablösen im Wasser innerhalb sehr kurzer Zeit (etwa eine Minute) völlig durchoxydierte.

Silber wurde nach dem Aufdampfen auf Kollodiumunterlage oder von Steinsalz abgelöst durchstrahlt.

C. Ergebnisse

1. Allgemeines Erscheinungsbild

Bei der Auswertung der Photometerkurven in Intensitätskurven ergibt sich in großen Zügen folgendes Bild (vgl. Abb. 12): Bei allen Schichten geht ein Teil der Elektronen unverzüglich hindurch (und zwar durchqueren größenordnungsmäßig bei den hier verwandten Dicken etwa $1/10$ % bis

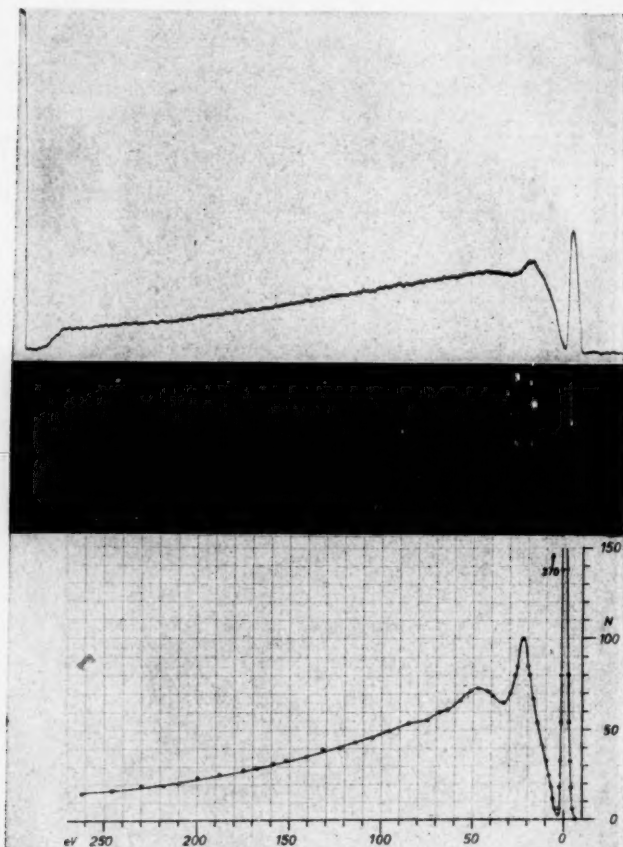


Abb. 12. Spektrum nach dem Durchgang durch eine Al_2O_3 -Folie bei 5,0 kV. Schichtdicke 150 Å. In der Mitte 6,3fache Vergrößerung der Aufnahme. Darüber Photometerkurve und darunter Intensitätskurve im gleichen Maßstab

einige Promille die Folie ohne Energieverlust und ohne merkliche Richtungsänderung); neben durch feine Löcher und Poren in der Schicht hindurchgehenden Elektronen, die sich nicht immer ganz vermeiden lassen, sind darin auch solche enthalten, die durch echte Streuprozesse ohne Energieverlust (Kernstreuung) die Ursprungsenergie beibehalten haben. Das wurde bestätigt durch Abblendung der Elektronen, die ohne Richtungsänderung die Folie durchquert hatten, mit Hilfe der beweglichen Blende hinter dem Folienträger. Wurde bei einer Aufnahme ohne Folie durch Verstellen der Blende der Primärstrahl abgedeckt und ließ man damit nur solche Elektronen auf die Photoplatte treten, die um mehr als 1° gestreut worden waren, so nahm die Zahl der in der Zeiteinheit auf der Photoplatte ankommenden Elektronen auf weniger als 1‰ von der ursprünglichen Zahl ab. (Der Rest kam durch die geringe Raumladungswirkung bzw. elastische Streuung an den Blendenkanten noch auf die Platte.) Brachte man jetzt eine Folie in den Strahlengang, so stieg die auf der Photoplatte ankommende Zahl der unverzögerten Elektronen auf ein Mehrfaches an, was nur durch Richtungsstreuung ohne Energieverlust, also elastische Streuung, in der Folie gedeutet werden kann.

Kleine Verzögerungen von etwa 3 bis 5 eV sind sehr wenig wahrscheinlich (die Intensität ist hier einige Promille bis einige Prozent der unverzögerten Intensität), noch kleinere lassen sich nicht einwandfrei nachweisen, da sie lediglich eine Unsymmetrie der unverzögerten Linie verursachen würden.

Nach größeren Verlusten zu steigt die Intensität stark an und hat bei Kollodium, Al_2O_3 und Silber ein ausgesprochenes Maximum bei dem Wert von 21 bis 23 eV. Nach diesem Extremwert, der von der Primärenergie und Schichtdicke unabhängig ist, fällt die Intensität merklich ab. Der weitere Verlauf der Spektren hängt ganz entscheidend von der Schichtdicke und weiterhin von der Primärenergie und dem Streuwinkel ab. Bei dünnsten Schichten (die nur von Kollodium erhalten wurden) fiel die Intensität sehr steil, ähnlich einer e -Funktion, ab. Der Idealfall des Energieverlustes in einem Elementarakte war hier annähernd realisiert (vgl. Abb. 13).

Bei dickeren Schichten trat ein neuer Anstieg zu einem weiteren Maximum auf, das dem zweifachen Wert des Verlustes von 22 eV zugeordnet werden konnte, jedoch war dieses zweite Maximum (ebenfalls das gelegentlich auftretende bei dem Dreifachen von 22 eV) weit weniger ausgeprägt, denn alle anderen Energieverluste von etwa 5 eV an aufwärts sind ebenso möglich, wenn auch weniger wahrscheinlich, als der von 22 eV. In den kurvenmäßigen Darstellungen wurden alle Intensitäten auf die des 22 eV-Maximums bezogen. Der naheliegende Gedanke, die Intensitäten auf die des unverzögerten Anteils zu beziehen, wurde fallen gelassen, da dieser Anteil durch feine Löcher und Poren in der Schicht leicht unkontrollierbar verändert werden konnte.

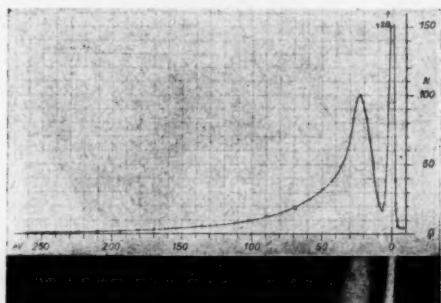


Abb. 13. 5fache Vergrößerung eines Spektrums nach dem Durchgang durch extrem dünne Kollodiumhaut — Dicke unter 100 Å geschätzt — bei 5,1 kV. Darüber die zugehörige Intensitätskurve

Bei Erhöhung der Schichtdicke nahm die Intensität größerer Verluste, bezogen auf die des 22-Volt-Maximums, stets stark zu. Absolut nahm die Zahl der um einen bestimmten Betrag verzögerten Elektronen mit steigender Schichtdicke bei kleinen Verzögerungen (etwa in der Größe von 22 eV) stark ab, bei mittleren

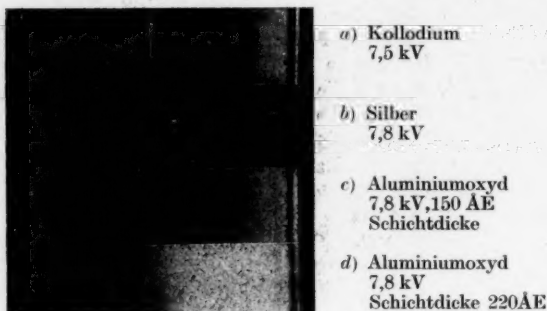


Abb. 14a—d. Vier Spektren in 3facher Vergrößerung

Verzögerungen weniger stark und erst bei Energieverlusten von etwa 100 eV nahm sie zu.

Mit zunehmender Primärenergie nimmt die Intensität der um kleine Winkel gestreuten Elektronen zu auf Kosten der stärker gestreuten. Die Zahl der um

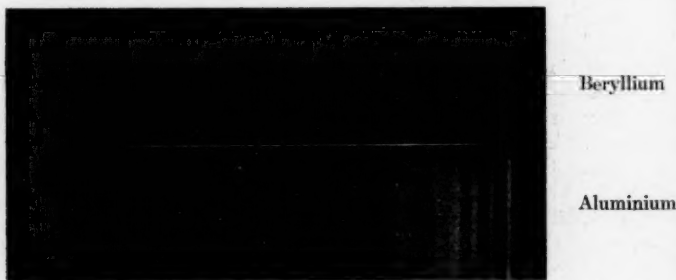


Abb. 15a, b. 5fache Vergrößerung zweier Aufnahmen bei 6,4 ekV. Streuwinkel $0 \pm 1,5^\circ$. Schichtdicke der Folien etwa 300 Å

größere Beträge verzögerten Kathodenstrahlen nimmt im Verhältnis zu der des 22-Volt-Maximums mit zunehmender Beschleunigungsspannung ab, was sicher zum erheblichen Teil auf eine Abnahme der Zahl der Streuprozesse zurückzuführen ist.

Bei Vergrößerung des Streuwinkels (was hier bis 4° vorgenommen werden konnte) wächst der Anteil der Elektronen mit größerem Energieverlust relativ stark an, absolut nimmt die Zahl der in einen ebenso großen Raumwinkel gestreuten Elektronen erheblich ab.

Die Spektren sahen bei Beryllium und Aluminium merklich anders aus, als bei den bisher genannten Materialien.

An Stelle des 22-Volt-Maximums wies Beryllium eines bei 19 eVolt auf, das wesentlich intensiver und schärfer im Vergleich zum Untergrund war. Daher konnte noch bei dem Vierfachen dieses diskreten Verlustes im Spektrum ein merkliches Maximum festgestellt werden.

Bei Aluminium liegt der besonders bevorzugte Wert der Verzögerung bei 14,7 eVolt. Er ist hier noch schärfer ausgeprägt und stärker vom Untergrund abgesetzt als bei Beryllium, bis zum Fünffachen dieses Wertes konnte noch eine merklich größere Intensität im Spektrum festgestellt werden als in der unmittelbaren Umgebung. Ein weiterer diskreter Verlust bei etwa 7 eVolt deutete sich an, er war jedoch weit weniger wahrscheinlich als der 15-Volt-Schritt. (Vgl. die Aufnahme in Abb. 15b und die ausgewerteten Intensitätskurven in den Abb. 17 und 18a.)

2. Einzelergebnisse

a) Größe der diskreten Verzögerungen bei den verschiedenen Materialien

Es wurden bei der Auswertung der Spektren die bevorzugten Energieverluste ausgemessen. Aus einer größeren Zahl von Messungen wurden folgende Werte erhalten:

Tabelle 1

Material	Maximum Volt	Mittl. Fehler d. Einzelmessg.	Mittl. Fehler des Mittels	Zahl der Messungen
Kollodium	21,3 ₃	± 1,1	± 0,17	42
Al ₂ O ₃	22,3 ₃	± 0,56	± 0,10	31
Ag	22,5 ₃	± 0,46	± 0,23	4
Be	18,9 ₃	± 0,49	± 0,10	24
Al	14,7 ₂	± 0,36	± 0,07	27

Die Messungen sind am genauesten bei Al (vgl. den mittleren Fehler der Einzelmessung), da hier der diskrete Energieverlust am schärfsten ausgeprägt ist. Da bei Kollodium das Maximum am breitesten ist, sind dort die Meßfehler auch am größten. Während bei Kollodium die Meßgenauigkeit durch die relativ große Breite des Maximums begrenzt ist, machen sich bei Aluminium andere Faktoren geltend: einmal ist das der unvermeidliche subjektive Fehler bei der Ausmessung der Photometerkurven (dem mittleren Fehler der Einzelmessung von 0,36 eVolt entspricht bei einer Beschleunigungsspannung von 6 kVolt in der Längenmessung auf der Photometerkurve ein Fehler von 0,12 mm). Weiterhin macht sich bereits die Körnung der Photoplatte bemerkbar, den 0,36 Volt entspricht bei 6 kVolt eine Längengewißheit von 0,013 mm auf dem Original.

Auf den Geschwindigkeitsspektren von Elektronen, die dickere Folien durchsetzt haben, auf denen daher ausgeprägte Maxima an der Stelle des doppelten, dreifachen, vierfachen oder gar fünffachen Wertes des diskreten Energieverlustes noch vorhanden waren, wurden die Lagen dieser weiteren Maxima ebenfalls ausgemessen. Die Tabelle 2a gibt die Abstände aller Maxima von der unverzögerten Linie (wie immer in eVolt). Die Tabelle 2b enthält die Energieunterschiede der einzelnen Maxima voneinander (jeweils die Mittelwerte mit ihren Fehlern).

Tabelle 2a.
Größe der ausgezeichneten Energieverluste in eVolt, absolut

Material	1. Maximum	2. Maximum	3. Maximum	4. Maximum	5. Maximum
Ag	22,56 ± 0,23	45,31 ± 0,51			
Al ₂ O ₃	22,31 ± 0,10	45,52 ± 0,50			
Be	18,97 ± 0,10	38,11 ± 0,20	57,31 ± 0,27	75,98 ± 0,88	
Al	14,72 ± 0,07	29,59 ± 0,12	44,34 ± 0,15	59,34 ± 0,23	73,84 ± 0,42

Tabelle 2b.
Abstand der ausgezeichneten Energieverluste voneinander in eVolt

Material	1. Maximum	2. Maximum	3. Maximum	4. Maximum	5. Maximum
Ag	22,56 ± 0,23	22,71 ± 0,29			
Al ₂ O ₃	22,31 ± 0,10	23,10 ± 0,48			
Be	18,97 ± 0,10	19,21 ± 0,11	19,15 ± 0,16	18,70 ± 0,14	
Al	14,72 ± 0,07	14,87 ± 0,06	14,80 ± 0,06	14,91 ± 0,08	14,75 ± 0,05

Aus der Tabelle 2b geht hervor, daß die Lagen der Maxima der Mehrfachstreuung meist einen größeren Abstand voneinander haben, als er dem Wert des diskreten Verlustes der Einfachstreuung entsprechen würde. Diese Abweichungen sind teilweise größer als der mittlere Fehler des Mittels. Wir nehmen an, daß diese Abweichungen nicht einen anderen (meist größeren) diskreten Energieverlust der Elektronen bei mehrfacher unelastischer Streuung bedeuten, sondern auf die Überlagerung der diskreten Spektren mit einem kontinuierlichen Spektrum (das weiter unten besprochen wird) zurückzuführen sind. Eine einfache Überlegung zeigt (vgl. die nebenstehende Skizze), daß eine Verlagerung des diskreten Maximums jeweils zu dem Maximum des kontinuierlichen Spektrums hin erfolgen muß. Der Absolutwert dieser Verschiebung muß um so größer sein, je größer das Verhältnis des Kontinuums zu dem „Linienspektrum“



ist und je steiler der Anstieg des Kontinuums an der betreffenden Stelle ist. Diese Überlegung wird durch die gemessenen Werte vollauf bestätigt. Bei Aluminium, wo die Intensität des Untergrundes klein im Vergleich zu der des Linienspektrums ist, sind die Verschiebungen etwa um den Faktor 4 kleiner als z. B. bei Aluminiumoxyd. Bei allen Spektren tritt eine Verlagerung zu dem Maximum des Untergrundes hin ein.

b) Abhängigkeit der diskreten Verluste von der Beschleunigungsspannung

Die Werte der diskreten Energieverluste sind innerhalb des untersuchten Bereichs praktisch unabhängig von der Beschleunigungsspannung. Die leichte Zunahme der gemessenen Werte mit der Beschleunigungsspannung liegt innerhalb

der Grenze der Meßgenauigkeit. Bei den anderen Materialien liegen die Verhältnisse ähnlich wie bei Al und Al_2O_3 , deren Spannungsabhängigkeit Tabelle 3 wiedergibt.

Tabelle 3
Spannungsabhängigkeit der diskreten Verluste

a) Aluminium			b) Aluminiumoxyd		
Primär- energie in kV	Mittelw. d. diskret. Verlustes	Zahl der Messgn.	Primär- energie in kV	Mittelw. d. diskret. Verlustes	Zahl der Messgn.
3,50	14,77	18	2,67	22,3	2
4,21	14,68	7	4,23	22,1	2
5,30	14,83	16	4,98	21,6	5
6,38	14,90	43	5,33	22,3	7
7,78	14,85	4	5,96	22,7	2
			7,50	22,6	7
			7,80	22,5	6

Führt man in das Whiddingtonsche Gesetz (vgl. S. 114) $U_0^2 - U_m^2 = b \cdot d$ den häufigsten Energieverlust $\Delta U = U_0 - U_m$ ein und formt die Gleichung um, so folgt: $b \cdot d = 2 U_0 \cdot \Delta U - \Delta U^2$. Ist ΔU klein gegen U_0 , so ist näherungsweise $\Delta U = \frac{b \cdot d}{2 U_0}$, d. h. der

häufigste Energieverlust ist umgekehrt proportional der Primärenergie. Die vorliegenden Messungen jedoch ergeben Unabhängigkeit des ausgezeichneten Energieverlustes von der Primärenergie, scheinen also dem Gesetz zu widersprechen. Die Klärung bringt Abb. 17. Durch dieselbe Folie waren verschieden schnelle Elektronen gegangen. Die energiereichen (7,8 ekV) hatten nur etwa halb so viel unelastische Zusammenstöße erlitten wie die energiearmen (3,5 ekV).

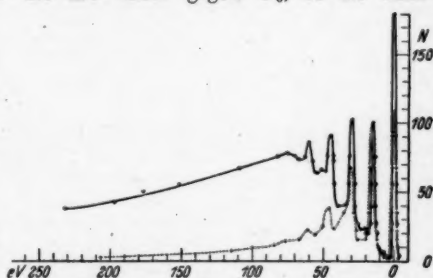


Abb. 17. Intensitätskurven zweier Spektren nach dem Durchgang durch dieselbe Aluminiumfolie bei 3,5 und 7,8 ekV. Relativer Intensitätsvergleich, die Intensitäten jeweils auf die des ersten diskreten Maximums bezogen.

○ 3,5 ekV, + 7,8 ekV

c) Schärfe der diskreten Energieverluste

Zur Prüfung der Schärfe der diskreten Maxima (vgl. die Intensitätskurven der Abb. 18a—e auf der folgenden Seite) wurden ihre Halbwertsbreiten gemessen, nur bei Aluminium und Beryllium reichte die Schärfe der Erscheinung dazu aus. Bei den drei anderen Materialien konnte nur die „Linienbreite“ bei 75% der Maximalintensität gemessen werden, da sich die Intensität zwischen dem Einfachen und Zweifachen des diskreten Verlustes nicht tiefer einsenkte. Bei einigen Kollodiumaufnahmen konnte die Halbwertsbreite ebenfalls gemessen werden, weil die Kollodiumhüthchen so dünn waren, daß die Elektronen beim Durchgang zum weitaus größten Teil nur in einem einzigen Elementarakt Energie abgaben. Die Halbwertsbreiten betrugen bei:

Kollodium
20—24

Beryllium
9—10

Aluminium
3,0—4,2

eV.

Die Dreiviertelwertsbreiten hatten folgende Werte:

Kollodium	Ag	Al_2O_3	Be	Al	
12—15	12—13	9,5—10,5	4,3—5,5	2,8—3,5	eVolt.

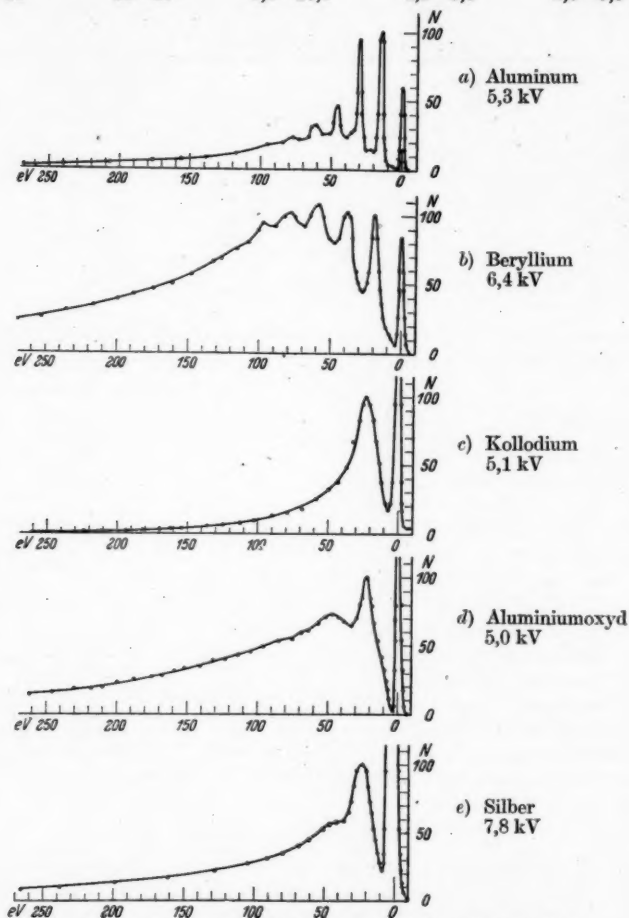


Abb. 18 a—e. Auswertung, Spektren verschiedener Materialien. Elektronenzahl als Funktion des Energieverlustes bei den verschiedenen Materialien zur Demonstration der Schärfe der diskreten Verluste. Elektronenzahl der ersten Verluststufe jeweils als 100 gesetzt

Die wahren Halb- bzw. Dreiviertelwertsbreiten sind kleiner als die oben angegebenen direkt gemessenen Werte, wegen des begrenzten Auflösungsvermögens der Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung bildet Elektronen völlig einheitlicher Energie ja nicht als eine unendlich feine Linie, sondern als ein Band von endlicher Halbwertsbreite ab, die etwa gleich der Breite des Quellspaltes ist.

Diese Halbwertsbreite kann man auch in Volt ausdrücken (ihr Absolutwert in eVolt wird wegen der Bestimmungsgleichung $\Delta U = \frac{2\Delta R}{R_0} \cdot U_0$ mit der Primärenergie ansteigen). Die Halbwertsbreiten der Intensitätsmarken, bei denen die wahren Energieunterschiede der Elektronen infolge verschiedener Austrittsgeschwindigkeit aus der Kathode von der Größenordnung von 0,1 eVolt sind, betragen bei 4 keVolt 2,2 eVolt und bei 7,5 keVolt 3,0 eVolt. Stellt man diesen Werten die Halbwertsbreiten des diskreten Verlustes nach dem Durchgang durch Aluminium bei den entsprechenden Beschleunigungsspannungen von 3,0 bzw. 4,2 eVolt gegenüber, so ergibt sich, daß die wahre Halbwertsbreite der Aluminium-Verluststufe sicher noch unter 1,5 eVolt liegt.

d) Einfluß der Schichtdicke auf die Lage der Maxima

Die Schichtdicke hat auf die Lage der Maxima bei den verschiedenen Materialien einen indirekten Einfluß. Wenn die Schichtdicke so groß wird, daß die Elektronen beim Durchgang im Mittel mehrere unelastische Zusammenstöße erleiden, kommt wegen der ebenfalls möglichen Energieverluste im Bereich von 5 bis 22 eVolt ein kontinuierlicher Untergrund zustande, dessen Maximum bei großen Schichtdicken erheblich höher als das des diskreten Wertes der Einfachstreuung wird. Das Maximum der Einfachstreuung kommt dadurch auf den Anstieg des kontinuierlichen Spektrums zu liegen und wird deshalb zu größeren Werten verschoben, ähnlich wie das bei den diskreten Maxima der Mehrfachstreuung zu beobachten war. Deshalb ist die wahre Größe der diskreten Werte bei Ag und Al_2O_3 sicher kleiner, als die obige Tabelle (2a bzw. 2b) angibt, da dort der Mittelwert von Schichten aller Dicken angegeben worden ist.

Bei Kolloidium, Beryllium und Aluminium entsprechen die oben angegebenen Mittelwerte den wahren diskreten Werten der Energieverluste genauer. Bei Kolloidium überwiegt in den meisten Fällen die Einfachstreuung wegen der geringen verwandten Schichtdicken, der Untergrund ist deshalb sehr schwach. Bei Be und vor allem Al ist der Einfluß der Schichtdicke deshalb sehr gering, weil der Untergrund wegen der Schärfe der Maxima stark zurücktritt. Ein Maß hierfür gibt die Tabelle 2b auf S. 128, die die Abstände des 2., 3. und 4. Maximums von dem jeweils vorangehenden in eVolt

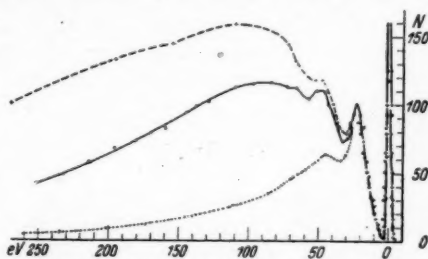


Abb. 19. Dickenabhängigkeit der Spektren bei Aluminiumoxyd. Elektronenzahl als Funktion der Verzögerung bei 150, 220 und 330 Å dicker Al_2O_3 -Schicht und 5,3 kV. Bei jeder Kurve Intensität des ersten Maximums gleich 100 gesetzt. \times 150 Å, \circ 220 Å, $+$ 330 Å

Tabelle 4
Einfluß der Schichtdicke auf die Lage der Maxima bei Aluminiumoxyd

Schichtdicke (Å)	Maximum (Volt)	Zahl der Messungen
150	21,97	8
220	22,35	15
330	23,2	3

Einen Anhaltspunkt über den Einfluß der Schichtdicke bei Al_2O_3 gibt die Tabelle 4. Der wirkliche Wert des diskreten Verlustes liegt demnach bei Al_2O_3 bei Einfachstreuung noch unter 21,97 eVolt, aber nur wenig, weil bei den Spektren der 150 ÅE dicken Schichten das Maximum der Einfachstreuung wesentlich intensiver ist als der kontinuierliche Untergrund. Der diskrete Verlust liegt demnach bei 21,9 eVolt. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Silber.

e) Einfluß des Streuwinkels auf die Lage der diskreten Werte

Bei Vergrößerung des Streuwinkels nimmt die Zahl der um diskrete Werte verzögerten Elektronen stärker ab als die anderen, besonders die um größere

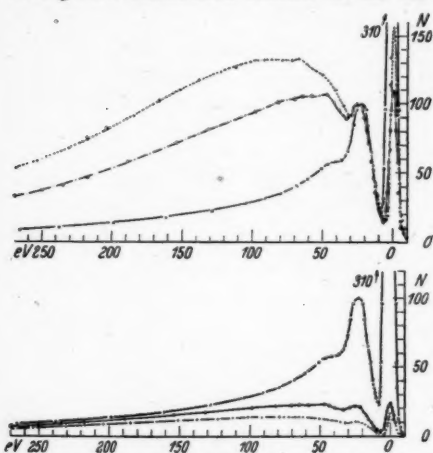


Abb. 20 a und b. Richtungsabhängigkeit der Energieverluste

Oben: Relativer Vergleich, Elektronenzahl bei 23 eVolt Verlust jeder einzelnen Kurve als 100 gesetzt.

Unten: Absoluter Vergleich, Elektronenzahl auf die des 23 eVolt-Maximums bei 0° Streuwinkel bezogen. Folie Ag, $\times 0 \pm \frac{1}{4}$, $\circ 2 \pm \frac{1}{4}$, $+ 4 \pm \frac{1}{4}$ Streuwinkel.

Energiebeträge verzögerten (vgl. Abb. 20). Die Vergrößerung des Streuwinkels wirkt also ebenso wie eine Erhöhung der Schichtdicke. Das hat zur Folge, daß der „Untergrund“ stärker hervortritt und die Werte der diskreten Maxima zu größeren Verlusten verschoben werden. In der folgenden Tabelle werden für die verschiedenen Materialien die Mittelwerte der diskreten Maxima, deren mittlerer Fehler und die Zahl der Messungen einmal für Spektren von Elektronengruppen ohne merkliche Richtungsänderung und zum anderen von solchen mit Streuwinkeln von $1,5$ bis 4° angeführt.

Aus der Tabelle 5 ersieht man, daß die Verschiebung des Maximums um so kleiner ist, je schärfer die diskreten Maxima sind.

Tabelle 5
Streuwinkelabhängigkeit der Energieverluste

Kollodium	Ag	Al_2O_3	Be	Al
20,96	22,63	22,28	19,07	14,76 eVolt
$\pm 0,61$	$\pm 0,26$	$\pm 0,10$	$\pm 0,11$	$\pm 0,06$ eVolt
5	8	26	42	45 Messungen
21,68	23,4	22,40	19,47	14,99 eVolt
$\pm 0,31$	$\pm 0,4$	$\pm 0,28$	$\pm 0,15$	$\pm 0,07$ eVolt
6	3	5	4	4 Messungen
0,72	0,8	0,12	0,40	0,23 eVolt-Verschiebung

f) Das Verhältnis der diskreten Maxima zu dem kontinuierlichen Untergrund

Bei Kollodium, Silber und Aluminiumoxyd wird der „kontinuierliche Untergrund“ zum großen Teil hervorgerufen durch die geringe Schärfe der diskreten Maxima. Bei einer Kollodiumaufnahme, bei der wegen der geringen Schichtdicke der weitaus größte Teil der Elektronen nur einen einzigen unelastischen Zusammenstoß erlitten hatte (die Intensitätskurve zeigt bei dem Überschreiten des doppelten Wertes des diskreten Verlustes in keinsten Weise die Andeutung eines zweiten Maximums), hatten dennoch von allen unelastisch gestreuten Elektronen nur 23% Energieverluste von 17 bis 27 eVolt erlitten, lagen also auf der Energieverlustkurve in einem 10 Volt breiten Bereich um das Maximum. Berücksichtigt man weiterhin, daß in allen Folien mit Ausnahme der dünnsten Kollodiumhäutchen zwei und mehrere unelastische Zusammenstöße stattfinden, so ist es erklärlich, daß die Spektren dieser drei Materialien nur zwei ausgeprägte Maxima haben, sonst aber einem kontinuierlichen Spektrum sehr ähnlich sehen. Bei größer werdender Schichtdicke nimmt die Annäherung an ein kontinuierliches Spektrum zu, wie es auch zu erwarten ist. — Bemerkenswert ist, daß die Vergrößerung des Streuwinkels das Aussehen der Spektren ebenso verändert wie die Vergrößerung der Schichtdicke (d. h. die Gesamtintensität der durch die gleichbleibende Blendfläche gehenden Elektronen nimmt ab, die Intensität der stärker verzögerten jedoch weniger als die der um diskrete Beträge verzögerten). Das läßt sich keinesfalls durch die mit der Neigung verbundene Vergrößerung der effektiven Schichtdicke erklären, da diese bei den größten hier verwendeten Streuwinkeln um höchstens 0,5% zunimmt.

Bei Beryllium und Aluminium liegen die Verhältnisse anders. Hier ist der Untergrund im Vergleich zu den diskreten Verzögerungsstufen erheblich schwächer. Er ist wegen der Schärfe der Maxima sicher nur zu einem kleinen Teil durch die endliche Breite der „Linien“ bedingt. Wie bereits in Kapitel B 4 betont, muß man bei diesen beiden Metallen mit einer merklichen Oxydhaut rechnen, deren Einfluß bei den geringen Dicken der Metallfolien nicht vernachlässigt werden kann. Die Berylliumschichten oxydierten selbst beim Ablösen von der Kollodiumunterlage in Amylacetat so stark, daß die Spektren hierdurch nicht schärfer wurden. Wenn zwischen zwei Aufnahmen Luft in die Versuchsanordnung eingelassen wurde (zum Wechseln der Photoplatten), so zeigten Spektren an derselben Schicht nach dem Lufteinlaß ein stärkeres Hervortreten des „Untergrundes“ im Vergleich zu den diskreten Verluststufen. Diese Erscheinung war bei Beryllium erheblich stärker ausgeprägt als bei Aluminium. Daraus muß man schließen, daß der Untergrund zu einem erheblichen Teil von den gleichzeitig durchstrahlten unvermeidlichen Oxydschichten herrührt. — Bei Vergrößerung des Streuwinkels verschob sich auch hier das Intensitätsmaximum des Spektrums zu größeren Verlusten, gleichzeitig nahm die Intensität der diskreten Maxima erheblich stärker ab als die des „Kontinuums“.

g) Whiddingtonsche Konstante

Bei dickeren Aluminiumoxydschichten wurde versucht, die Whiddingtonsche Konstante zu bestimmen, obwohl von vornherein nicht angenommen werden darf, daß man dabei zu einer guten Übereinstimmung mit anderen Werten kommt; denn die Whiddingtonsche Konstante bezieht sich ja auf den häufigsten Energieverlust nach vielen unelastischen Streuprozessen, während sich unsere Messungen auf die Energieverluste nach wenigen unelastischen Zusammenstößen erstrecken.

Hier hatte sich das statistische Zusammenwirken der Energieverluste der verschiedenen Elementarprozesse noch nicht so wie bei den sonstigen Messungen der Whiddingtonschen Konstanten eingespielt, was sich darin äußerte, daß sich in den Geschwindigkeitsspektren dem kontinuierlichen Whiddingtonschen Maximum noch einige andere Maxima überlagern, die dem einfachen, zweifachen und dreifachen Wert des diskreten Energieverlustes entsprechen. (Vgl. auf Abb. 19 die Spektren der 220 bzw. 330 ÅE dicken Folien, die zur Berechnung der Konstanten mit herangezogen wurden.)

Bei Schichtdicken von 220 und 330 ÅE und Primärenergien von 5,3 bis 7,8 eVolt ergaben sich für b Werte von 3,5 bis 4,3, im Mittel $4,0 \cdot 10^5$ kVolt²/cm und entsprechend für a Werte von 4,4 bis 5,3, im Mittel $5,0 \cdot 10^{42} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^4 \cdot \frac{1}{\text{cm}}$.

Da für Aluminiumoxyd keine Messungen von anderer Seite vorliegen, vergleichen wir diese Werte mit solchen von Aluminium-Metall, dessen Konstante am genauesten bekannt ist. Für Al-Metall haben frühere Messungen für a Werte zwischen 6 und $14 \cdot 10^{42}$ ergeben²³⁾, der beste Wert dürfte bei $8,7 \cdot 10^{42}$ liegen. Da die Konstanten bei verschiedenen Materialien der Dichte proportional sind, sollte man annehmen, daß die Konstante bei dem Oxyd größer ist als beim Metall, wenn man die Dichte des hier vorliegenden amorphen Oxydes gleich der des kristallinen (3,9) setzt. Dann sollte $a = 12,5 \cdot 10^{42}$ sein. Der hier gemessene Wert der Konstanten unterscheidet sich also von dem, der aus Vielfachstreuungsmessungen an Aluminium extrapoliert wurde, nur um den Faktor 2,5, was bei Berücksichtigung der obigen Überlegungen und der geringen Genauigkeit des Wertes für Aluminium als gute Übereinstimmung angesehen werden kann.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Danzig ausgeführt. Dem Direktor des Instituts, Herrn Professor Dr. W. Kossel, möchte ich für die Anregung zur Arbeit und für sein förderndes Interesse meinen besonderen Dank aussprechen. Die Arbeit war im August 1942 abgeschlossen, aus äußeren Gründen erfolgt die Veröffentlichung erst jetzt²³⁾.

²³⁾ Herr Dipl.-Ing. W. Lang hat im Winter 1943/44 im Studienurlaub mit derselben Versuchsanordnung einige Messungen an Cu- und Ni-Folien gemacht, seine Ergebnisse werden in der „Optik“, z. Z. im Druck, veröffentlicht.

Heidenheim, Möricke-Str. 13.

(Bei der Redaktion eingegangen am 29. 12. 1944.)

Elektronenbremsung an Röntgenniveaus¹⁾

Von Gerhard Ruthemann

(Der Fakultät für Naturwissenschaften und Ergänzungsfächer der Technischen Hochschule Danzig eingereichte Dissertation; 2. Teil)

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Mit der verschärften magnetischen Halbkreisemethode wurden die Energieverluste von 6 bis 8,5 ekVolt-Elektronen nach dem Durchgang durch sehr dünne Kollodiumhäutchen (Dicke um 100 ÅE) untersucht. Es ergab sich:

In den nach dem Durchgang durch die Folien auftretenden kontinuierlichen Geschwindigkeitsspektren wurden neben zahlreichen Elektronen, die kleinere Energieverluste durch Zusammenstöße mit den äußeren Hüllenelektronen der durchschossenen Atome erlitten hatten, bei längeren Belichtungszeiten auch Elektronengruppen gefunden, die um die *K*-Anregungsenergie von C verzögert worden waren. Auch an der Stelle der *K*-Anregungsenergie von O wurde ein schwächeres Maximum im Spektrum gefunden und bei der entsprechenden Stelle für N eine, wenn auch schwache, Unstetigkeit. Der wahrscheinlichste Energieverlust für die *K*-Anregung von C wurde zu 291,2 und der von O zu 543 eVolt bestimmt.

Auf 170 Elektronen, die in der äußeren Hülle der durchschossenen Atome unelastische Zusammenstöße erlitten hatten, kam eine *K*-Anregung von C bei einer Primärenergie von 7,5 ekVolt und einem mittleren Streuwinkel von 1,7°. Dieses Verhältnis ist abhängig vom Streuwinkel, eine Abhängigkeit von der Primärenergie ist ebenso zu erwarten.

Die totale *K*-Anregungswahrscheinlichkeit für 7,5 ekVolt-Elektronen in massiver C-Antikathode wird abgeschätzt zu etwa 2—3 Anregungen auf ein einfallendes Elektron.

1. Einleitung

In der vorangehenden Arbeit war über Energieverluste berichtet worden, die Elektronen beim Durchgang durch dünne Folien durch Zusammenstöße mit den Elektronen der äußeren Hülle erleiden. Es lag nahe, in den Geschwindigkeitsspektren der in den Folien gestreuten Elektronen auch nach solchen Elektronengruppen zu suchen, die durch Zusammenstöße mit den inneren Atomelektronen größere Energieportionen abgegeben hatten. Unter diesen Elektronengruppen interessierten besonders diejenigen, die durch Ionisierung in der *K*-Schale der durchschossenen Atome deren *K*-Anregungsenergie verloren hatten. Der Vorgang

¹⁾ Ein kurzer Auszug mit vorläufigen Meßergebnissen erschien in den Naturwiss. 30, 145 (1942).

ist von der Seite der damit verbundenen charakteristischen Röntgenstrahlung her recht genau bekannt, andererseits aber konnte der Nachweis des Vorganges von der Elektronenseite her — durch erhöhte Absorption der Elektronen beim Überschreiten der *K*-Anregungsenergie bzw. durch Messung der entsprechenden Energieverluste der anregenden Elektronen — bisher nicht gebracht werden.

Es war von vornherein klar, daß die Zahl der in der *K*-Schale verzögerten Elektronen wesentlich geringer sein mußte, als die Zahl der in der äußeren Hülle verzögerten Elektronen, denn der Wirkungsgrad bei der Erregung von Röntgenstrahlen durch Elektronen ist sehr klein, erreicht er doch z. B. bei einer Kupfer-Antikathode und 30 kVOLT nur die Größenordnung von $1/\infty^3$. Das gilt jedoch für die Röntgenbremsstrahlung, die hier interessierende, direkt durch Elektronen angeregte *K*-Strahlung ist noch wesentlich schwächer. Da hier fernerhin Elektronen nach dem Durchgang durch dünne Folien untersucht wurden, der oben zitierte Wirkungsgrad aber für die massive Antikathode gilt, war zu erwarten, daß weit weniger als ein Tausendstel der die Folie durchdringenden Elektronen eine Ionisierung in der *K*-Schale bewirkt haben konnte.

Trotz der obigen Überlegungen wurde hier ebenfalls nach Elektronen gesucht, die eine *K*-Ionisierung bewirkt hatten. Die Versuchsanordnung (vgl. die vorangehende Arbeit) erlaubte nur die Messung von Energieverlusten bis etwa 600 eVOLT herauf. (Der maximal auswertbare Verlust betrug etwa 7% der Primärenergie, die Hochspannungsanlage konnte bis 8,5 kVOLT betrieben werden.) Also konnten nur Anregungen in den *K*-Schalen der leichtesten Elemente bis herauf zum Sauerstoff gemessen werden. Bei O beträgt die *K*-Ionisierungsenergie etwa 530 eVOLT.

2. Methode der Energieverlustmessung

Die Energieverluste wurden mit der verschärften magnetischen Halbkreis-methode gemessen²⁾, bei der gegenüber der normalen Halbkreis-methode das Magnetfeld auf den ringförmigen Bereich zwischen den beiden coaxialen Feldspulen beschränkt wird. Fernerhin wird bei ihr durch Überlagerung eines die Strahlbahn begleitenden inhomogenen Feldes die natürliche Unschärfe der Halbkreis-methode herabgesetzt und das Auflösungsvermögen entsprechend gesteigert. Eine eingehendere Beschreibung der Versuchsanordnung befindet sich in der vorangehenden Arbeit. Elektronen von 5 bis 8,5 eKVOLT werden durch dünne Folien geschossen. Die in der Folie um kleine Winkel gestreuten Elektronen werden durch ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien senkrecht zu ihrer Flugrichtung stehen, in eine Kreisbahn gezwungen und aus dem Krümmungsradius die Energie der Teilchen bestimmt. Die Primärenergie der Elektronen und das ablenkende Magnetfeld werden so aufeinander abgestimmt, daß auf der Photoplatte am Ende der halbkreisförmigen Bahn die unverzögerten Elektronen am äußeren Rande (in Abb. 1, rechts) auf-treffen. Je stärker die Verzögerung der Elektronen, um so weiter innen (links in Abb. 1) treffen sie auf. Die Schwärzung der Photoplatte wird mit einem Registrier-photometer ausgemessen und mit Hilfe der Schwärzungskurve auf die Zahl der Elektronen geschlossen.

Die Spektren hatten etwa folgendes Aussehen (vgl. die vorangehende Arbeit, Abb. 13): außen trat eine scharfe Linie auf, die durch unverzögerte Elektronen hervorgerufen wurde (diese waren z. T. durch feine Löcher und Poren in der

²⁾ H. Kulenkampff, Ann. Physik **69**, 548 (1922); **43**, 494 (1943).

³⁾ H. Voges und G. Ruthemann, Z. Physik **114**, 709 (1939).

Schicht durchgekommen), im Bereich kleiner Energieverluste (wenige eVolt) war die Elektronenintensität sehr gering, im Gebiet zwischen 15 und 23 eVolt trat ein Maximum auf, das materialeigentlich war, der weitere Verlauf der Spektren wurde durch die Schichtdicke entscheidend beeinflusst. Bei den uns hier interes-

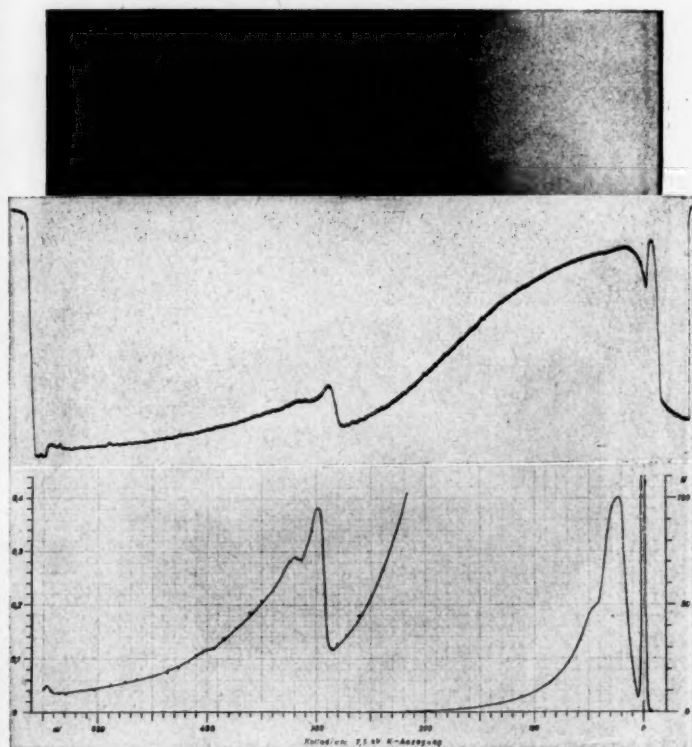


Abb. 1 a—c. Geschwindigkeitsspektrum von 7,5-ekVolt-Elektronen nach dem Durchgang durch dünne Kollodiumhaut in 5,4facher Vergrößerung. Streuwinkel der Elektronen $1,7 \pm 1/4^\circ$. (Originalaufnahme stark überbelichtet.) Darunter die zugehörige Mikrophotometer- und Intensitätskurve im gleichen Maßstab. Der linke Teil der Intensitätskurve ist Fortsetzung des rechten Teils mit 250fachem Ordinatenmaßstab. Aufnahme Nr. 44,9

sierenden dünnsten Schichten fiel die Elektronenzahl von diesem charakteristischen Maximum aus nahezu nach einer e -Funktion ab, auf etwa ein Fünftel der Maximalintensität bei einem Energieverlust von 100 eVolt. Wenn jetzt Elektronen eine Ionisierung in der K -Schale bewirken, so sollte an der Stelle des Spektrums, die der K -Anregungsspannung des entsprechenden Elements entspricht, ein erneuter Intensitätsanstieg beginnen.

Nach dem Durchgang durch dünne Aluminiumoxydschichten trat bei wiederholten Versuchen an der fraglichen Stelle des Spektrums keine eindeutige Unstetigkeit auf. Schließlich trat an einer überbelichteten Aufnahme eines Kollodiumhäutchens eine um 293 eVolt verzögerte Elektronengruppe merklich hervor. Dieser Verlust entspricht der *K*-Ionisierungsenergie von Kohlenstoff. Bei entsprechender Belichtung traten auch bei 540 eVolt und rund 400 eVolt (*K*-Anregungsspannung von Stickstoff) Unstetigkeiten auf. Eines dieser Spektren nebst Photometerkurve und Intensitätskurve zeigt Abb. 1.

3. Lage der Kanten

Aus einer Reihe von Spektren bei 7,5—8,0 ekVolt Primärenergie wurden die Werte für den wahrscheinlichsten Energieverlust und für die Mindestenergie, die zur *K*-Ionisierung notwendig ist (die Stelle des Spektrums, an der die Intensität wieder ansteigt), gemessen in eVolt.

Tabelle 1

C	Mindestenergie	$280,5 \pm 0,8$	11 Messungen
	Wahrscheinlichster Verlust	$291,2 \pm 0,6$	15 Messungen
O	Mindestenergie	$530,8 \pm 2,0$	6 Messungen
	Wahrscheinlichster Verlust	$543,3 \pm 1,5$	6 Messungen

Die Intensitätskurve steigt bei C von der Mindestanregungsenergie steil an (vgl. Abb. 1), erreicht bei einem um 11 eVolt größeren Verlust ein Maximum (die wahrscheinlichste Energieabgabe), um nach noch höheren Energieverlusten erheblich langsamer abzufallen. Die Hälfte der Maximalintensität tritt einmal bei einem um 6 Volt kleineren und zum anderen Male bei einem um etwa 60 Volt (± 15 Volt) größeren Energieverlust auf.

Für den Abstand zwischen Mindestverlust und dem häufigsten Energieverlust wurde bei C 10,7 und bei O im Mittel 12,5 Volt gemessen.

Zum Vergleich der hier gemessenen Verzögerungsbeträge mit den Werten für die Röntgenabsorptionskanten wird hier die Stelle des steilsten Anstieges der Intensität mitten zwischen Mindestanregungsenergie und dem wahrscheinlichsten Verlust genommen. Dieser Stelle entspricht in der Röntgenspektroskopie die Stelle des steilsten Abfalles des Absorptionskoeffizienten, die bei den Angaben über die Absorptionskanten normalerweise zugrunde gelegt wird.

Tabelle 2

Röntgenabsorptionskanten	C	O
Thibaud (1928) ⁴⁾	283,8	524
Prins und Takens (1932) ⁵⁾	284,5	—
Magnusson (1932) ⁶⁾	285,1	—
Chalklin und Chalklin (1934) ⁷⁾	287,1	532,1
Elektronenenergieverlust		
Verfasser (1942).....	285,9	537

⁴⁾ J. Thibaud, *Nature* **121**, 321 (1928).

⁵⁾ J. A. Prins und A. J. Takens, *Z. Physik* **75**, 741 (1932).

⁶⁾ T. Magnusson, *Z. Physik* **79**, 161 (1932).

⁷⁾ F. C. Chalklin und L. P. Chalklin, *Philos. Mag.* **17**, 544 (1934).

4. Intensitätsverhältnisse

Wie die Intensitätskurve (Abb. 1c) zeigt, sind die Intensitätsunterschiede zwischen der um 22 Volt verzögerten Elektronengruppe und der um die *K*-Anregungsenergie verzögerten ganz erheblich, gelegentlich erheblich größer als 1000:1. Messungen so großer Intensitätsunterschiede sind nur möglich wegen der Sättigung der Schwärzungskurve der Photoplatte; während bei der in Abb. 1 wiedergegebenen Kurve Nr. 44,9 die Intensitäten bei 22 und 298 Volt Verzögerung sich wie 260:1 verhalten, ist das Schwärzungsverhältnis 5,4:1. Die Schwärzungskurven für diesen großen Intensitätsbereich wurden durch ein gegenüber der früheren Methode (vgl. die vorangegangene Arbeit) etwas abgeändertes Verfahren ermittelt. Bei einer bestimmten, konstanten Intensität wurde eine Reihe von Linien auf einen Plattenstreifen gedruckt bei wenig veränderter Primärenergie und konstantem Feld (ebenso wie in der vorigen Arbeit geschildert), aber erheblichen Unterschieden in der Belichtungszeit (diese wurde jetzt von 4 Sekunden bis 160 Sekunden, also um den Faktor 40 variiert). Auf dem nächsten Plattenstreifen wurde eine Reihe mit erheblich (etwa um den Faktor 5 bis 30) erhöhtem Emissionsstrom aufgenommen. Nach dem Photometrieren beider Intensitätsmarkenreihen wurden die Schwärzungen bei der kleineren Intensität wie üblich als Funktion der Belichtungszeit aufgetragen und die Schwärzungskurve gezeichnet. Dann wurde die Schwärzung der schwächsten, mit kleinster Belichtungszeit aufgenommenen Linie der intensiveren Reihe ermittelt und die dieser Schwärzung entsprechende Belichtungszeit der Reihe kleinerer Intensität abgelesen. Auf diese Weise wurde das Intensitätsverhältnis der beiden Reihen ermittelt und die Belichtungszeiten der intensiveren Reihe jeweils mit diesem Verhältnis multipliziert. Mit Hilfe dieser Methode gelang es, Meßmarken aufzunehmen, deren Produkte $I \cdot t$ sich bis zum Faktor 1000 und mehr unterschieden. Die so erhaltenen Schwärzungskurven wurden ebenfalls durch das Verfahren von Dorgelo^{*)} (vgl. auch die vorangehende Veröffentlichung) kontrolliert. Bei so starken Intensitätsunterschieden ist zwar die Genauigkeit der Angaben mit erheblich größeren Fehlern behaftet, es lassen sich aber dennoch einige systematische Unterschiede in den Spektren erkennen und Abschätzungen über die Wahrscheinlichkeit der *K*-Anregung machen.

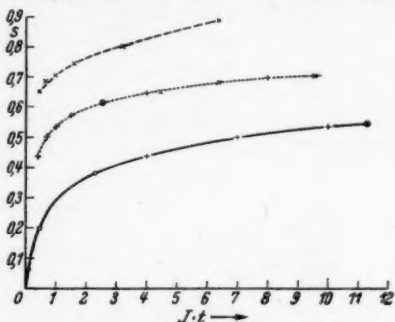


Abb. 2. Schwärzungskurve einer Kontrast-Platte bei 7,5 ekV. (Platte Nr. 44)

- Kurve mit 10mal größeren Abszissenwerten als ausgezogene Kurve
- Kurve mit 100mal größeren Abszissenwerten als ausgezogene Kurve
- + + Intensitätsmarkenreihe mit kleiner Emission
- × × Intensitätsmarkenreihe mit großer Emission
- ○ Kurvenpunkte nach dem Dorgelo-Verfahren
- ⊗ Anschlußpunkt für Reihe mit großer Emission (bei $I \cdot t = 25$)
- ⊕ Anschlußpunkt für Dorgelo-Verfahren (bei $I \cdot t = 11,3$)

^{*)} H. B. Dorgelo, Physik. Z. 26, 756 (1925).

Bei Erhöhung des Streuwinkels fällt bei gleich großem Raumwinkel die Intensität der um die Kohlenstoff- K -Anregungsenergie verzögerten Elektronen stark ab. Der Abfall ist jedoch erheblich schwächer als derjenige des diskreten Verzögerungswertes in der äußeren Hülle. Während die Intensität des 22-Volt-Maximums bei Erhöhung des Streuwinkels von $0 (\pm 1/4)^\circ$ auf $1,7 (\pm 1/4)^\circ$ auf $1/10$ abfällt, sinkt die Intensität der um die K -Anregungsenergie verzögerten Elektronen auf die Hälfte. Ebenso ist bei weiterer Erhöhung des Streuwinkels von $1,7$ auf $3,4 (\pm 1/4)^\circ$ der Intensitätsabfall bei dem 22-Volt-Maximum wiederum stärker als bei der K -Anregung. — Bei den dünnsten hier verwendeten Folien ist der Intensitätsabfall des 22-Volt-Maximums beim Übergang von 0 auf $1,7^\circ$ Streuwinkel noch erheblich steiler. Die folgende Tabelle faßt diese Erfahrungen zusammen.

Tabelle 3
Intensitätsabnahme als Funktion des Streuwinkels

Streuwinkel $^\circ$	$I_{22 \text{ v}}$ mittlere Dicke	$I_{22 \text{ v}}$ dünnste Folie	$I_{291 \text{ v}}$ mittlere Dicke	$I_{291 \text{ v}}$ dünnste Folie
$0 \pm 1/4$	1	1	1	1
$1,7 \pm 1/4$	$1/10$	$1/100$	$1/2$	$1/6$
$3,4 \pm 1/4$	$1/50$	$1/500$	$1/7$	$1/20$

5. Wahrscheinlichkeit der Kohlenstoff K -Anregung

a) Aus Elektronengeschwindigkeitsspektren

Um Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der K -Anregung machen zu können, ist eine Betrachtung der relativen Intensitäten der in der äußeren Hülle und der um die K -Anregungsenergie verzögerten Elektronen notwendig.

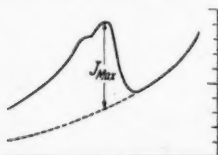


Abb. 3. Intensität des häufigsten Energieverlustes bei der K -Anregung über dem Untergrund

Tabelle 4
Intensitätsverhältnis der um 22 und 291 eV verzögerten Elektronen

Streuwinkel	$I_{22 \text{ v}} : I_{291 \text{ v}}$
$0 \pm 1/4^\circ$	2000—6000
$1,7 \pm 1/4^\circ$	350—390
$3,4 \pm 1/4^\circ$	210—220

Die Angaben über die Häufigkeit der K -Anregung beziehen sich bei den folgenden Betrachtungen stets nur auf die Intensitätszunahme über dem Untergrund des kontinuierlichen Spektrums an der Stelle des häufigsten Verlustes, vgl. Abb. 3.

Das Intensitätsverhältnis der beiden ausgezeichneten Werte hängt — wie aus obigen Angaben folgt — entscheidend von dem Streuwinkel und bei dem Streuwinkel 0° auch von der Schichtdicke ab. Relativ zur Intensität der um 22 eV verzögerten Elektronen nimmt die Intensität der um die K -Anregungsenergie verzögerten mit zunehmendem Streuwinkel stark zu, obwohl sie absolut stark abnimmt, siehe Tabelle 4. Bei den in der ursprünglichen Richtung durch die Folie hindurchgehenden Elektronen treten die um die K -Anregungsenergie verzögerten mit abnehmender Schichtdicke gegenüber den anderen stark zurück.

Aus einer Aufnahme bei 7,5 ekVolt und einem Streuwinkel von $1,7^\circ$ wurde das Intensitätsverhältnis der in der äußeren Hülle verzögerten Elektronen zu denen, die eine K-Anregung hervorgerufen hatten, zu ermitteln versucht. Dabei wurde die Energieverlustkurve über den Wert der K-Anregung hinaus extrapoliert und die zwischen Kurve und Abszissenachse eingeschlossene Fläche in Beziehung zu der durch die K-Anregungen zusätzlich hervorgerufenen Fläche gesetzt. Ferner wurde der mittlere Energieverlust aller die Folie durchquerenden Elektronen ermittelt. Dabei kam bei einem mittleren Energieverlust von 41 eVolt auf 170 durch die äußere Hülle verzögerte Elektronen eines, das eine K-Anregung bewirkt hatte. — Infolgedessen kann ein Elektron bei einer Energieabgabe von 7,2 ekVolt (Abbremsung von 7,5 ekVolt bis zur Kohlenstoff-K-Anregungsenergie von 0,3 ekVolt) und einem mittleren Energieverlust von 41 eVolt pro unelastischen Zusammenstoß $7200:41 = 175$ Anregungen ausführen. (Bei einem größeren Streuwinkel als $1,7^\circ$ nimmt die Zahl der Elektronen im Spektrum, die eine K-Anregung bewirkt haben, relativ zu den anderen zwar zu, gleichzeitig steigt jedoch auch der mittlere Energieverlust an; bei kleineren Winkeln nimmt die Zahl der K-Anregungen entsprechend ab, gleichzeitig aber auch der mittlere Energieverlust, so daß die Zahl der möglichen K-Anregungen sich mit dem Streuwinkel nur wenig ändern wird.) Da nur ein Hundertsiebzigstel der Anregungen die K-Schale betreffen, wäre die totale K-Anregungswahrscheinlichkeit also recht genau 1, wenn während der Abbremsung sowohl die differentiale (auf die Längeneinheit bezogene) Anregungswahrscheinlichkeit als auch der mittlere Energieverlust pro Zentimeter konstant bleiben würden.

Die mittlere K-Anregungswahrscheinlichkeit ist vermutlich von der bei 7,5 kVolt nicht sehr verschieden. Messungen über die differentiale Anregungswahrscheinlichkeit als Funktion der Primärenergie liegen von Webster und Mitarbeitern an Ag (47) vor⁹⁾. Webster findet von der Mindestanregungsspannung U_0 bis $1,5 U_0$ einen steilen Anstieg der Wahrscheinlichkeit, der dann erheblich flacher wird, zwischen $3,5$ und $4,5 U_0$ ein flaches Maximum aufweist, um nach höheren Energien sehr langsam abzufallen. Weitere Messungen von Webster und Mitarbeitern an Ni (28) sind nur als kurzer Sitzungsbericht veröffentlicht worden ohne Zahlenangaben¹⁰⁾. Messungen von E. Lorenz¹¹⁾ an einer „dünnen“ Folie von Al (13) sind in diesem Zusammenhang nur beschränkt brauchbar, da die Folie zu dick war ($8 \cdot 10^{-5}$ cm); bei kleinen Primärenergien der Elektronen bis etwa $4 U_0$ dürfte der größte Teil von ihnen schon vor dem Erreichen der Rückseite der Folie bis auf die Anregungsenergie abgebremst worden sein, also wirkt die Folie bis zu dieser Spannung als massive Antikathode. Eine theoretische Arbeit von Soden¹²⁾ kommt zu dem Ergebnis, daß die Anregungswahrscheinlichkeit bei $3-4 U_0$ ein Maximum hat, unabhängig von der Ordnungszahl. Das ist zwar in Übereinstimmung mit den Experimenten von Webster an Ag und Ni, die Messungen von Lorenz scheinen dem jedoch zu widersprechen, denn Lorenz findet ein ausgesprochenes Maximum bei $9-10 U_0$, entsprechend 14–15,5 kVolt. Nach dem Whiddingtonschen Gesetz ergibt sich bei der Folie von Lorenz von $8 \cdot 10^{-5}$ cm Dicke und 15 kVolt ein mittlerer Energieverlust von 2,3 ekVolt, wenn man als Konstante den Wert von $8,7 \cdot 10^{12}$ (cm/sec)¹³⁾ $\cdot 1$ /cm von Gentner¹³⁾ annimmt. Das gilt für die Elektronen, die die Folie parallel zu ihrer Eintrittsrichtung verlassen. Berücksichtigt man in Anlehnung an Gentner auch die Elektronen, die in der Folie große Richtungsänderungen erlitten haben (einschließlich der rückdiffundierten), so ergibt sich für Lorenz's Folie bei 15 kVolt ein mittlerer Energieverlust von 3,5 ekVolt unter der Annahme, daß dieser proportional der Schichtdicke

⁹⁾ D. L. Webster, W. W. Hansen und F. B. Duveneck, Physic. Rev. **43**, 839 (1933).

¹⁰⁾ D. L. Webster, L. T. Pockmann, K. Harworth und P. Kirkpatrick, Physic. Rev. **55**, 682 (1939).

¹¹⁾ E. Lorenz, Z. Physik **51**, 71 (1928).

¹²⁾ D. Graf Soden, Ann. Physik **19**, 409 (1934).

¹³⁾ K. Gentner, Ann. Physik **31**, 407 (1938).

und umgekehrt proportional der Primärenergie ist. (Das Whiddingtonsche Gesetz $v_0^4 - v_x^4 = a \cdot x$ kann ja auch in der Form $U_0^2 - U_x^2 = b \cdot x$ geschrieben werden. Wenn man für $U_0 - U_x$ jetzt ΔU setzt und die Gleichung umformt, ergibt sich: $b \cdot x = 2 U_0 \cdot \Delta U - \Delta U^2$ und solange ΔU klein gegen U_0 ist, näherungsweise: $\Delta U = b \cdot x / 2 U_0$, d. h. der wahrscheinlichste Energieverlust erfüllt näherungsweise die obige Annahme.) Wenn der mittlere Energieverlust aller Elektronen bei 15 kVolt in der Folie von Lorenz nicht größer als 3,5 eKVolt ist, kann das Maximum der Anregungswahrscheinlichkeit aber kaum bei 6 kV ($= 4 U_0$) liegen, wie es die Sodensche Theorie verlangt. Nach Lorenz kann man unter Berücksichtigung der Energieverluste in der Folie annehmen, daß das Maximum der Anregungswahrscheinlichkeit bei etwa $8 U_0$ liegt. Daraus kann man folgern, daß auch bei C das Maximum der Anregungswahrscheinlichkeit bei höheren Spannungen als $4 U_0$ liegt; wenn man von Ag (47) entsprechend $3,5 U_0$ über Al (13) entsprechend $8 U_0$ extrapoliert, kommt man bei C (6) zu etwa $12 U_0$ ($= 3,5$ kVolt). Man muß also sowohl nach den Messungen von Webster und Lorenz als auch nach der Theorie von Soden annehmen, daß man sich bei C und 7,5 kVolt ($= 25 U_0$) erheblich über dem Maximum der differentiellen K-Ionisierung befindet. — Sowohl die Messungen von Lorenz wie die Theorie ergeben für $25 U_0$ eine Ionisierungswahrscheinlichkeit, die etwa 40% von der maximalen beträgt. Die Rechnungen von Soden würden somit zu einer mittleren Wahrscheinlichkeit vom etwa 1,6fachen des Wertes bei 7,5 kVolt führen. Die Extrapolation der Messungen von Lorenz würde wegen der Verschiebung des Maximums zu höheren Spannungen zu einer mittleren Wahrscheinlichkeit führen, die kaum größer als die bei 7,5 kVolt ist.

Man kann also annehmen, daß die mittlere Anregungswahrscheinlichkeit der K-Schale zwischen 0,3 und 7,5 kVolt etwa 1—1,6mal so groß ist wie bei 7,5 kVolt.

Der mittlere Energieverlust andererseits steigt mit abnehmender Primärenergie an, und zwar nimmt er stärker als mit $1/U$ zu, so daß eine Verringerung der totalen Anregungswahrscheinlichkeit eintritt. Wir schätzen diesen Einfluß so ein, daß er die Anregungswahrscheinlichkeit auf die Hälfte herabsetzt (der größere mittlere Energieverlust bei abnehmender Primärenergie macht sich erst dort stärker bemerkbar, wo die Elektronen eine verringerte Anregungswahrscheinlichkeit haben). Insgesamt ergibt sich aus diesen Betrachtungen bei einer massiven Kollodiumanode eine totale Anregungswahrscheinlichkeit von 0,5 bis 0,7.

Berücksichtigt man jetzt, daß das Kollodium nur zu einem Teil (etwa 25% seines Gewichtes) aus Kohlenstoff besteht, und die Energieverluste, die durch Wechselwirkung mit der äußeren Hülle hervorgerufen werden, ja infolgedessen auch nur zu einem Teil auf unelastische Zusammenstöße mit Kohlenstoff zurückgehen, so kommt man für eine massive Kohlenstoff-Antikathode unter der Annahme, daß die Zahl und der mittlere Energieverlust bei Zusammenstößen mit C und den anderen Bestandteilen des Kollodiums gleich sind, zu einer totalen K-Anregungswahrscheinlichkeit von etwa 2 bis 3.

b) Durch Extrapolation von Röntgenmessungen

Auf der anderen Seite ist eine, wenn auch rohe, Abschätzung der totalen K-Anregungswahrscheinlichkeit aus Röntgenmessungen möglich. Da direkte Messungen darüber nur für schwerere Elemente, Cu (29) bis Ag (47), vorliegen, muß die Abhängigkeit von der Ordnungszahl aus anderen Untersuchungen abgeschätzt und dann die Anregungswahrscheinlichkeit für C extrapoliert werden. Die Abhängigkeit von der Anregungsspannung wird aus entsprechenden Messungen bei schwereren Elementen entnommen.

Die Intensität der Röntgenbremsstrahlung bezogen auf den Einheitsemissionsstrom der Kathode ist bekanntlich proportional Z und U^2 :

$$I_B \approx Z \cdot U^2.$$

Mit zunehmender Spannung verschiebt sich das Maximum des Bremsstrahlspektrums zu kürzeren Wellenlängen oder wegen $\nu = \frac{c}{\lambda}$ zu höheren Frequenzen.

Die Grenzfrequenz ν_{Gr} ist ja bekanntlich genau proportional U . $\nu_{Gr} \approx U$. Da die spektralen Verteilungskurven bei den verschiedenen Spannungen geometrisch ähnlich sind, folgt, daß die mittlere Größe der Bremsstrahlquanten $h \cdot \bar{\nu}$ ebenfalls proportional der Spannung ist. Dasselbe läßt sich auch aus den Messungen von Kulenkampff²⁾ entnehmen.

Unter Benutzung dieser Beziehung kann man von der Bremsstrahlungsintensität als Funktion von U und Z übergehen zur Zahl der Bremsstrahlquanten:

$$n_B(U, Z) = \frac{I_B}{h \cdot \bar{\nu}} \approx \frac{I_B}{U} \approx \frac{Z \cdot U^2}{U} = Z \cdot U.$$

Wir wollen jetzt von der Zahl der Bremsstrahlquanten schließen auf die Zahl der emittierten K -Quanten. Wir benutzen dazu Messungen von Unnewehr¹⁴⁾, der das Intensitätsverhältnis beider Strahlen bei einer Spannung U_1 gemessen hat, bei der die K_α -Linien jeweils an der Stelle des Bremsstrahlmaximums liegen. Unnewehr findet im Bereich von Cr (24) bis Ag (47), daß das Intensitätsverhältnis der charakteristischen Strahlung zur Bremsstrahlung proportional $1/Z^3$ ist. $I_K/I_B \approx 1/Z^3$.

Da wegen des Zusammenfalles der K_α -Linien mit dem Bremsstrahlmaximum die Größe der K -Quanten gleich der mittleren Größe der Bremsstrahlquanten ist (bzw. zwischen beiden ein konstantes Verhältnis besteht), verhält sich die Zahl der Quanten bei der K - und Bremsstrahlung ebenso wie die der Intensitäten:

$$\frac{n_K}{n_B} = \frac{I_K}{I_B} \approx \frac{1}{Z^3}, \quad n_K \approx \frac{1}{Z^3} \cdot n_B \approx \frac{1}{Z^3} \cdot Z \cdot U_1 = \frac{1}{Z^2} \cdot U_1.$$

Die Spannungen, bei denen die K_α -Linien mit dem Bremsstrahlmaximum zusammenfallen, sind wegen der stark verschiedenen K -Anregungsspannungen bei den verschiedenen Elementen absolut zwar stark verschieden, im Vergleich zu den jeweiligen Anregungsspannungen (U_0) jedoch konstant, und zwar bei der 1,5fachen Anregungsenergie. Da diese bei den verschiedenen Elementen proportional dem Quadrat der Ordnungszahl sind (in guter Annäherung), $U_1 = 1,5 U_0 \approx Z^2$, folgt: $n_K \approx \frac{1}{Z^2} \cdot U_1 \approx \frac{1}{Z^2} \cdot Z^2 = \text{const}$, d. h. die Zahl der emittierten K -Quanten ist in erster Näherung bei der 1,5fachen Anregungsspannung bei allen Elementen gleich.

Von der Zahl der emittierten K -Quanten kann nun weiter mit Hilfe der Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz auf die Zahl der Anregungen geschlossen werden. Die Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz u gibt das Verhältnis der Zahl der emittierenden Atome zur Zahl der angeregten Atome (σ_K) an: $u = \frac{n_K}{\sigma_K}$. Aus unserer vorigen Überlegung folgt: $\sigma_K = \frac{n_K}{u} = \frac{\text{const}}{u}$ bei $1,5 U_0$. Die Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz ändert sich außerordentlich stark mit der Ordnungszahl. Aus theoretischen Betrachtungen kommt G. Wentzel¹⁵⁾ zu folgender Formel für diese Abhängigkeit: $u = \frac{Z^4}{a + Z^4}$, wobei $a = 1 \cdot 10^6$ ist, die in guter Überein-

¹⁴⁾ E. C. Unnewehr, Physic. Rev. **22**, 529 (1923).

¹⁵⁾ G. Wentzel, Z. Physik **43**, 524 (1927).

stimmung mit den experimentell ermittelten Werten für u ist. Abänderungen dieser Formel, die z. B. von Haas¹⁶⁾ vorgenommen sind, können hier unberücksichtigt bleiben, da die Abweichungen der Messungen verschiedener Autoren voneinander weit größer sind, als die Unterschiede der beiden Formeln angeben würden, wie z. B. die Zusammenstellung von W. Niens¹⁷⁾ zeigt. Lediglich bei kleinen Ordnungszahlen (O, 8 und Ne, 10) findet Locher¹⁸⁾ mit einem von den anderen abweichendem Meßprinzip erheblich höhere Werte als man nach der Formel berechnet. Wir werden den weiteren Berechnungen die Werte der Wentzelschen Formel zugrunde legen. Für die totale K -Anregungswahrscheinlichkeit bei der 1,5fachen Anregungsenergie kommt man somit zu folgender Abhängigkeit von der Ordnungszahl:

$$\sigma_K = \frac{\text{const}}{u} = \frac{\text{const} (Z^4 + 1 \cdot 10^6)}{Z^4}.$$

Für kleine Ordnungszahlen (bis zu etwa 20) ist Z^4 klein gegen $1 \cdot 10^6$ und kann im Zähler vernachlässigt werden, d. h. σ_K ist proportional $1/Z^4$. Zu einem ähnlichen Ergebnis kommt auf Grund von theoretischen Vorstellungen Soden (l. c.).

Die Tabelle 5 gibt das Verhältnis der totalen K -Anregungswahrscheinlichkeit einiger Elemente zu der des Silbers (jeweils bei demselben Vielfachen der Anregungsspannung, $1,5 U_0$) unter Benutzung der Formel von Wentzel für den Fluoreszenzkoeffizienten.

Tabelle 5

	C	Al	Cu	Mo	Ag	Au
$\sigma_K/\sigma_K, \text{Ag} \dots\dots\dots$	640	29	2,0	1,1	1,0	0,85

Die vorliegenden Messungen über die totale K -Anregungswahrscheinlichkeit von F. Wisshak¹⁹⁾ und D. L. Webster²⁰⁾ zeigt Tabelle 6 (jeweils bei $1,5 U_0$).

Tabelle 6

	Cu	Mo	Ag	Ag (n. Webster)
$\sigma_K \dots\dots\dots$	$0,52 \cdot 10^{-3}$	$0,252 \cdot 10^{-3}$	$0,088 \cdot 10^{-3}$	$0,23 \cdot 10^{-3}$

Unter Zugrundelegung dieser Werte ergeben sich für die totale K -Anregungswahrscheinlichkeit von C bei $1,5 U_0$ Werte, die zwischen 0,146 und 0,166 liegen, lediglich der auf Wisshaks Wert für Ag basierende Wert fällt heraus mit 0,056. Wir nehmen als Mittel 0,15 an. — Wenn jedoch die erheblich höheren Werte für u , die Lochers Meßmethodik bei den leichtesten Elementen lieferte, einwandfrei sind, dann ist die totale K -Anregungswahrscheinlichkeit noch um rund einen Zehnerfaktor niedriger anzusetzen, nimmt also Werte von 0,01 bis 0,02 an.

Wenn man von der Anregungswahrscheinlichkeit bei $1,5 U_0$ auf die bei $25 U_0$ (= 7,5 kVolt bei C) schließen will, dann kommen einige nur wenig kontrollierbare

¹⁶⁾ M. Haas, Ann. Physik 16, 473 (1933).

¹⁷⁾ W. Niens, Ann. Physik 26, 513 (1936).

¹⁸⁾ G. L. Locher, Physic. Rev. 40, 484 (1932).

¹⁹⁾ F. Wisshak, Ann. Physik 5, 507 (1930).

²⁰⁾ D. L. Webster, Proc. Nat. Acad. Amer. 14, 339 (1928).

Faktoren ins Spiel. Wenn man die Messungen von A. Jönsson²¹⁾ extrapoliert, kommt man auf ein Intensitätsverhältnis der K -Strahlung von 100 ($I_{25} U_0 / I_{1,5} U_0$). Aus den Messungen von E. Lorenz (l. c.) ergibt sich für dieselben Spannungen ein Intensitätsverhältnis von 40, dieses ist jedoch sicher zu klein, da die bei höherer Primärenergie in tieferen Antikathodenschichten entstehenden Röntgenstrahlen wegen des bei Lorenz flachen Austrittswinkels (9°) durch Absorption stark geschwächt werden. Bei Berücksichtigung der Absorption bei den Messungen von Lorenz kommt man auf ein ähnliches Intensitätsverhältnis wie Jönsson. —

Dieses Intensitätsverhältnis wird annähernd auch für die totale K -Anregungswahrscheinlichkeit zutreffen. Einmal werden zwar mit zunehmender Primärenergie die Röntgenstrahlen tiefer in der Antikathode entstehen und deshalb durch Absorption stärker geschwächt werden, auf der anderen Seite nimmt jedoch mit zunehmender Primärenergie der indirekt, durch Absorption kurzwelligerer Röntgenstrahlung hervorgerufene Anteil der K -Strahlung zu, wie Wisshak (l. c.) gezeigt hat. Diese beiden Faktoren, die beide ein anderes Intensitätsverhältnis der direkten K -Anregung als das der gemessenen Linienintensität bewirken, arbeiten jedoch gegeneinander und dürften sich bei den leichten Elementen zu einem erheblichen Teile aufheben.

Unter Benutzung obiger Intensitätsverhältnisse bei 25- und 1,5facher Anregungsenergie auch für Kohlenstoff kommt man bei 7,5 kVolt zu einer totalen K -Anregungswahrscheinlichkeit von etwa 15.

Vergleicht man diesen aus den Röntgenmessungen extrapolierten Wert für σ_K mit dem hier ermittelten von 2 bis 3, so erscheint die Übereinstimmung bei flüchtiger Betrachtung schlecht, sie ist jedoch leidlich befriedigend, wenn man berücksichtigt, daß der Ausgangswert der Abschätzung bei Mo (42) etwa 60000mal kleiner ist als der Endwert für C. Bei Berücksichtigung der Messungen von Locher für die Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz erniedrigt sich die aus den Röntgenmessungen ermittelte totale K -Anregungswahrscheinlichkeit um einen Zehnerfaktor, damit würde sich eine sehr befriedigende Übereinstimmung mit den hiesigen Messungen ergeben.

Diese Überlegungen erklären auch, warum es R. Baginski²²⁾ nicht gelang, um die K -Anregungsenergie von Al, Cu bzw. Ag verzögerte Elektronengruppen in den Geschwindigkeitsspektren nach dem Durchgang durch die entsprechenden Folien aufzufinden. Einmal ist die K -Anregungswahrscheinlichkeit bei Al erheblich geringer als bei dem hier untersuchten C (bei Cu und Ag ist das Verhältnis noch ungünstiger, vgl. Tabelle 5), und weiterhin genügt die Empfindlichkeit der Anordnung bei Baginski nicht, um die verhältnismäßig geringe Zahl der um die K -Anregungsenergie verzögerten Elektronen nachzuweisen. Baginski gibt an, daß er noch 1/200 der bei 45 kVolt durch die dickste Folie hindurchgehenden Elektronen hätte nachweisen können; hier konnte dagegen noch weniger als 1/50000 der durch die Kollodiumhäutchen bei 7 kVolt hindurchgehenden Elektronen wahrgenommen werden.

6. Die K -Anregung bei Sauerstoff und Stickstoff

In den Geschwindigkeitsspektren ist die Intensität an der Stelle des häufigsten Energieverlustes der K -Anregung von O ganz erheblich geringer als die der ent-

²¹⁾ A. Jönsson, Z. Physik **43**, 845 (1927).

²²⁾ R. Baginski, Dissertation Kiel (1924).

sprechenden Stelle von C, sie ist bei O nur etwa $1/14$ von der bei C (Mittel aus 4 Messungen). Nach der Theorie von G. Wentzel über die Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz sollte die Anregungswahrscheinlichkeit bei O $1/3,1$ mal so wahrscheinlich sein als bei C (die Haassche Formel gibt ein etwas größeres Verhältnis, $1/3,8$). Das hier gemessene Intensitätsverhältnis ist jedoch für O noch erheblich ungünstiger, obwohl Kollodium $1,5$ — $1,8$ mal so viel O-Atome als C-Atome enthält. Diese geringe Zahl der O-Anregungen könnte einmal daher rühren, daß die frischen Kollodiumhäutchen noch Amylacetat (in dem das Kollodium gelöst war) oder Kampfer (das dem Kollodium zum Weichmachen häufig zugesetzt wird) enthalten haben. Dadurch würde das Verhältnis der Zahl der O- und C-Atome zueinander erheblich verschoben werden, — denn im Kollodium kommen auf ein Sauerstoffatom $0,6$, im Amylacetat $3,5$ und im Kampfer 16 Kohlenstoffatome —, und ein entsprechender Anstieg der Kohlenstoffanregungen im Verhältnis zu den Sauerstoffanregungen hervorgerufen werden. Es ist weiterhin anzunehmen, daß die Intensitätskurve der O-Anregung (Elektronenzahl als Funktion des Energieverlustes) nach höheren Energieverlusten langsamer abfällt, als die Kurve für C und somit die Zahl der O-Anregungen im Vergleich zu der der C-Anregungen größer ist, als das Intensitätsverhältnis an der Stelle des häufigsten Energieverlustes angibt.

Bei Stickstoff schätzen wir den Intensitätssprung an der Stelle des wahrscheinlichsten Energieverlustes bei der K-Anregung auf rund $1/30$ des Sprunges bei C. Wegen der sehr geringen Zahl der N-Anregungen kann diese Schätzung aber nur geringe Genauigkeit beanspruchen. Im Kollodium kommt auf 2 — 3 C-Atome nur 1 N-Atom. Bei $1,5 U_0$ ergibt sich entsprechend der Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz für N eine etwa halb so große totale K-Anregungswahrscheinlichkeit wie für C. Bei Anwesenheit von Amylacetat oder Kampfer verschiebt sich die Wahrscheinlichkeit weiter zuungunsten von N, denn Amylacetat und Kampfer enthalten gar keinen Stickstoff²³⁾ ²⁴⁾.

Die Arbeit wurde im Jahre 1941/42 im Anschluß an die Untersuchung über „Diskrete Energieverluste mittelschneller Elektronen beim Durchgang durch dünne Folien“ im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Danzig ausgeführt. Herrn Professor Dr. W. Kossel möchte ich für fördernde Diskussionen meinen besonderen Dank aussprechen. — Aus äußeren Gründen erfolgt die Veröffentlichung erst jetzt.

²³⁾ Ein Teil des Kollodiums könnte sich auch in Graphit umgewandelt haben, vgl. H. König, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1946.

²⁴⁾ Durch die oben zitierte Vorveröffentlichung in den „Naturwissenschaften“¹⁾ angeregt, hat J. Hillier einen „electron microanalyser“ gebaut und mit ihm die Versuche fortgeführt. Er benutzt ein 2-stufiges Schattenmikroskop nach H. Boersch [Z. techn. Physik **20**, 346 (1939)] mit dahintergeschalteter Halbkreisemethode. Durch 2-stufige Verkleinerung des emittierenden Kathodenbereichs wird eine feine Elektronen-sonde hergestellt und damit kleine Bereiche des Präparats abgetastet. Durch eine 3. Elektronenlinse wird das Schattenbild vergrößert oder aber — nach Abschalten der Linse — durch die Halbkreisemethode die Energieverluste gemessen. Hillier konnte um die K-Anregungsenergie von Be, C, N, O, Al und Li und um die L-Anregungsenergie von Fe und Zn verzögerte Elektronengruppen nachweisen. — J. Hillier, Phys. Rev. **64**, 318 (1943); J. Hillier und R. F. Baker, J. appl. Phys. **15**, 663 (1944).

Heidenheim, Möricke-Str. 13.

(Bei der Redaktion eingegangen am 3. Januar 1945.)

Über die Druckzerstörung des ZnS-Cu-Phosphors durch Mahlen und ihre Folgeerscheinungen

Von F. Frey

(Mit 14 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

1. Es wurde der Mahlvorgang bei einem technisch hergestellten ZnS-Cu-Phosphor verfolgt und die Korngrößenverteilung der einzelnen Mahlfractionen untersucht. Die Abhängigkeit der mittleren und häufigsten Korngröße von der Mahldauer bei verschiedenen Mahlgeschwindigkeiten wurde in Kurven dargestellt. Es ergibt sich, daß die nach gleichen Mahlzeiten erhaltene mittlere Korngröße keine einfache Funktion von der Mahlgeschwindigkeit ist.

2. Die mittlere Korngröße strebt mit fortschreitender Mahldauer einem Grenzwert zu, der etwa bei $4\ \mu$ liegt. Elektronenmikroskopisch wurde das Auftreten zweier Gruppen von Teilchen mit mittleren Durchmessern von $40\ m\mu$ bzw. $0,22\ \mu$ festgestellt. Es wird vermutet, daß es sich hierbei um „Splitter“ handelt, die möglicherweise eine chemische Umwandlung erfahren haben.

3. Die einzelnen Mahlfractionen wurden nach dem Debye-Scherrer-Verfahren röntgenographisch untersucht und die Umwandlung der Wurzitstruktur in die Blendestruktur graphisch dargestellt. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Korngrößenkurven, soweit ein Vergleich hier möglich ist.

4. Es wird eine Röntgenmethode angeführt, die gestattet, die Korngrößenabnahme mit fortschreitender Mahldauer relativ zu verfolgen.

5. Orientierende Versuche über die Emission der lichterregten Substanz zeigen eine starke Abnahme der Emission der einzelnen Fractionen mit fortschreitender Mahldauer und zwar sowohl während der Erregung (mit UV-Licht) als auch zu verschiedenen Zeiten danach.

6. In einer Kathodenstrahlapparatur wurden die einzelnen Mahlfractionen erregt und die spektrale Intensitätsverteilung mittels Spektrograph auf der photographischen Platte festgehalten. Die photometrierten Schwärzungen liefern folgendes Ergebnis: Es ist eine grüne Bande vorhanden, deren Maximum sich mit fortschreitender Fraktion von $525\ m\mu$ zu $565\ m\mu$ verschiebt. Außerdem tritt mit fortschreitender Umwandlung der Wurzitstruktur in die Blendestruktur die blaue Bande des Grundmaterials hervor.

7. Es zeigt sich, daß die fremdaktivierten Zentren stärkerer Zerstörung unterliegen und daß wahrscheinlich durch geringfügige Änderung der Gitterstruktur die Bandenverschiebung zustande kommt.

Einleitung

Bereits Lenard und seine Mitarbeiter¹⁾ haben bei ihren grundlegenden Untersuchungen auf dem Gebiet der Phosphoreszenz festgestellt, daß ein Zerkleinern der

¹⁾ Lenard u. Klatt, Ann. Physik 12, 439 (1913); siehe auch: Handbuch der Experimentalphysik Bd. 23, Teil 1.

Substanz immer eine Abnahme der Phosphoreszenzfähigkeit bei gleichzeitiger Verfärbung mit sich bringt. Es wurde beobachtet, daß diese Erscheinung weniger eine Folge allseitigen Druckes als eine solche der Zerspaltung ist. Riehl und Ortmann²⁾ führen an, daß bei den Emissionsmessungen häufig ein rein optischer Effekt überlagert ist. Danach besteht eine Funktion zwischen Korngröße bzw. Kornzahl in der Volumeneinheit und Eindringtiefe des erregenden und emittierten Lichtes. Der Rückgang der wahren Emission soll daher wesentlich geringer sein als bisher beobachtet. Ferner konnte eine Druckverfärbung nicht festgestellt werden, was darauf zurückgeführt wird, daß sich die untersuchten industriell hergestellten Präparate durch ihre geringe Härte wesentlich von den Lenard-Phosphoren unterscheiden.

Vorliegende Untersuchungen sollen weiteren Aufschluß geben über die bei der Zerkleinerung der Teilchen auftretenden Veränderungen sowie über deren Folgeerscheinungen. Über die Abnahme der Emission bei Lichterregung wurden nur einige orientierende Versuche ausgeführt, ausführlicher wurde die Emission bei Kathodenstrahlerregung untersucht.

I. Der Vorgang beim Mahlen

1. Anordnung und Durchführung der Versuche

Als Ausgangsmaterial wurde ein technisch hergestellter ZnS-Cu-Phosphor³⁾ verwendet. Die Zerkleinerung der Teilchen wurde durch Mahlen in einer elektrisch angetriebenen Kugelmühle⁴⁾ bewirkt. Der Mahlvorgang wurde in einer großen Anzahl von Versuchen bei Variation der Geschwindigkeit zeitlich verfolgt. Es wurde von jeder Fraktion an Hand einer großen Anzahl von Mikroaufnahmen mittels des „Panphot“ von Leitz die Größenverteilung der Teilchen bestimmt. Dazu mußten etwa 5000 Teilchen ausgemessen werden. Da die nach einer bestimmten Mahldauer erreichte Korngröße von der Menge der sich im Tiegel befindlichen Substanz abhängt, wurde zu Beginn der Versuchsreihe soviel Substanz eingeführt und bei den einzelnen Fraktionen jeweils so wenig entnommen, daß der durch die Substanzverminderung bedingte Fehler vernachlässigt werden kann. Ferner wurden mittels des Siemensschen Übermikroskops die kleinsten vorhandenen Teilchen erfaßt und ihre Größe ermittelt.

2. Versuchsergebnisse

Die Abb. 1—4 und die Tabelle 1 zeigen anschaulich das Ergebnis der Versuche.

Versuchsreihe A: Mahlgeschwindigkeit 2 U/sec, Achatmörser,

Versuchsreihe B: Mahlgeschwindigkeit 4 U/sec, Achatmörser,

Versuchsreihe C: Mahlgeschwindigkeit 4 U/sec, Prokorundmörser.

Für die Fraktionen der Versuchsreihe C wurde keine Bestimmung der Korngröße vorgenommen. Sie dienen zu andern in einem späteren Abschnitt zu besprechenden Untersuchungen.

Die Korngrößenverteilungskurven der Versuchsreihen A und B (Abb. 1 und 2) zeigen, daß mit zunehmender Mahldauer das Korn kleiner und die Korngröße einheitlicher wird. Es ist dies eine bei allen Mahlvorgängen auftretende Erschei-

²⁾ N. Riehl u. H. Ortmann, Ann. Physik 29, 556 (1937).

³⁾ Herr Dir. Dr. habil. Riehl, Auergesellschaft, Berlin, hat mir freundlicherweise die Substanz zur Verfügung gestellt. Hierfür und für anregende Diskussionen bin ich ihm zu Dank verpflichtet.

⁴⁾ Hersteller: L. Hormuth, Inh. W. Vetter, Heidelberg, nach Bloch-Rossetti.

nung. Weitere aus den Kurven ersichtliche Vorgänge beim Mahlen sind teilweise substanzbedingt und seien hier noch ausführlicher erörtert.

Wie aus den Kurven der Abb. 3 und 4 deutlich zu sehen ist, strebt die mittlere und die häufigste Korngröße einem Grenzwert zu, der in beiden Fällen etwa bei 4μ liegt. Außerdem weichen mittlere und häufigste Korngröße nur wenig voneinander ab. Der linke Ast der Größenverteilungskurven ist mit fortschreitender Fraktion mit einem zunehmenden Fehler behaftet, da Teilchen unter 1μ Durchmesser nicht erfaßt sind. Ihr Vorhandensein wurde mit dem Übermikroskop festgestellt. Die Kurven stellen demnach die Größenverteilung der Teilchen über 1μ Durchmesser dar.

Wie man aus den Abb. 3 und 4 sieht, ist die Abnahme der mittleren oder häufigsten Korngröße keine lineare Funktion von der Mahlgeschwindigkeit. Dies ist bei der Konstruktion und Wirkungsweise der Kugelmühle auch nicht zu erwarten, da die kinetische Energie der Kugeln in Rechnung zu setzen ist. Es müßte also zumindest eine quadratische Funktion bestehen. In Wirklichkeit

Tabelle 1. Mahldauer der Fraktionen:

A-Reihe	B-Reihe	C-Reihe
$A_0 = 0$ Std.	$B_0 = 0$ Std.	$C_0 = 0$ Std.
$A_1 = 1$ Std.	$B_1 = 2$ Std.	$C_1 = 2$ Std.
$A_2 = 2$ Std.	$B_2 = 4$ Std.	$C_2 = 4$ Std.
$A_3 = 4$ Std.	$B_3 = 6$ Std.	$C_3 = 6$ Std.
$A_4 = 7$ Std.	$B_4 = 11$ Std.	$C_4 = 11$ Std.
$A_5 = 12$ Std.	$B_5 = 21$ Std.	$C_5 = 21$ Std.
	$B_6 = 31$ Std.	$C_6 = 31$ Std.
		$C_7 = 41$ Std.
		$C_8 = 51$ Std.

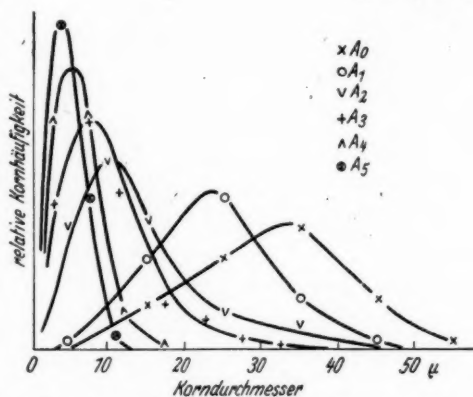


Abb. 1. Korngrößenverteilung der Versuchsreihe A

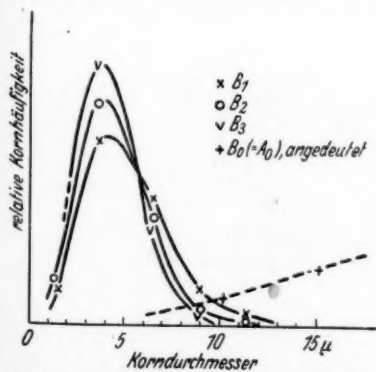


Abb. 2. Korngrößenverteilung der Versuchsreihe B

liegen die Verhältnisse noch komplizierter, da die nach einer bestimmten Mahldauer erreichte Korngröße außer von der Mahlgeschwindigkeit noch abhängt vom Material des Mahlbechers und der Kugeln sowie von der Härte und wahrscheinlich auch von der Kristallstruktur der Substanz selbst. Bei halber Mahlgeschwindigkeit ($v_A = \frac{1}{2} v_B$) ist zur Erzielung einer gleichen häufigsten Korngröße eine Zeit nötig, die mit abnehmender Korngröße zunächst vom 2fachen Betrag auf den 4fachen ansteigt und dann

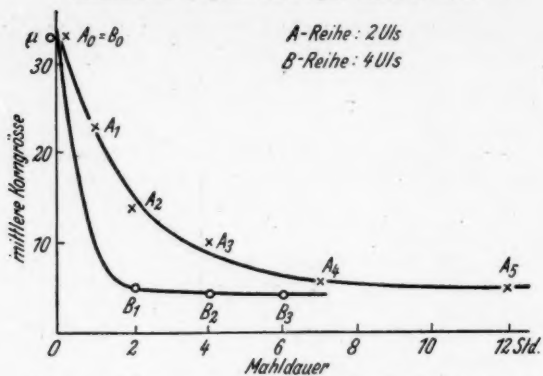


Abb. 3. Mittlere Korngröße als Funktion der Mahldauer

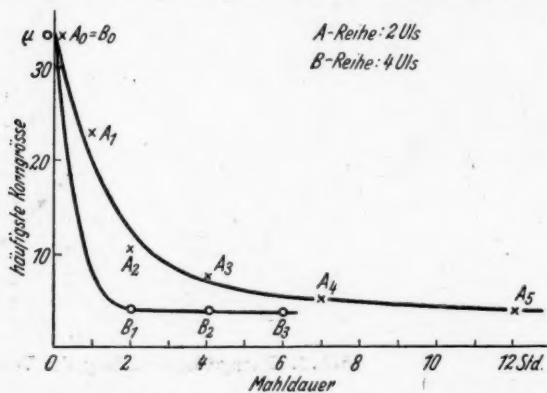


Abb. 4. Häufigste Korngröße als Funktion der Mahldauer



Abb. 5. Teilchengruppe, Vergr. 38000fach

wieder langsam auf 1 sinkt bis der Grenzwert erreicht ist. Es hat den Anschein, als ob das $4\text{-}\mu$ -Korn ein besonders resistenzfähiges Gebilde darstelle, während die übermikroskopisch festgestellten wesentlich kleineren Teilchen „Splitter“ sind. Aus einer größeren Anzahl Aufnahmen aus den Fraktionen B_1 – B_6 wurde ein häufig vorkommender Durchmesser um $0,22\text{ }\mu$ festgestellt. Bei den letzten Fraktionen (B_5 und B_6 , sowie C_7) verschiebt sich dieser Wert ein wenig, und zwar zu $0,15\text{ }\mu$. Ferner wurde als mittlerer Durchmesser einer Gruppe noch kleinerer Teilchen $40\text{ m}\mu$ festgestellt, während das kleinste Teilchen selbst einen Durchmesser von $13\text{ m}\mu$ hat⁵⁾.

Abb. 5 zeigt eine Teilchengruppe mit dem „häufigen“, Abb. 6 eine solche mit dem kleinsten Durchmesser.

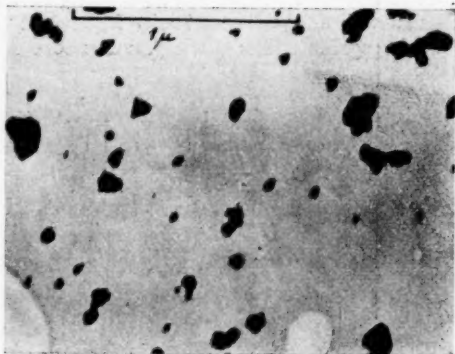


Abb. 6. Teilchengruppe, Vergr. 38000 fach

II. Die Strukturumwandlung des ZnS-Cu-Phosphors beim Mahlen

1. Anordnung und Durchführung der Versuche

Die Umwandlung von der Wurzitstruktur in die Blendestruktur als Begleiterscheinung bei der „Druckzerstörung“ wurde bereits von Schleede und Gantzkow⁶⁾ beobachtet. In der hier vorliegenden Arbeit wurde diese Erscheinung systematisch verfolgt, gleichlaufend mit den im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Versuche über die Korngrößenabnahme. Es wurden auf einem abgeschmolzenen Röntgenrohr mit Cu-Anode und Nickelfilter von jeder Mahlfraction Debye-Scherrer-Aufnahmen gemacht, und zwar von dem in einem „Marckröhrchen“ befindlichen Präparat je eine Dreh- und eine Standaufnahme. Erstere wurde mit einem Zeißschen Registrierphotometer ausgewertet, während letztere nur einem orientierenden Zwecke dienen sollte.

2. Versuchsergebnisse

Aus den Abb. 7–9 ist zu ersehen, wie mit fortschreitender Mahldauer der Übergang vom Wurzit- zum Blendetyp allmählich erfolgt. Bei der A-Reihe geschieht dies sehr langsam und nur teilweise, bei der B-Reihe sehr rasch und vollständig. Die C-Reihe zeigt ebenfalls eine vollständige Umwandlung, jedoch wieder etwas langsamer als die B-Reihe.

Zur quantitativen Verfolgung der Strukturumwandlung wurde die Intensität der einzelnen Interferenzlinien in Abhängigkeit von der Mahldauer in Kurven aufgenommen (Abb. 10–12). Die ausgesprochenen Wurzitlinien verschwinden,

⁵⁾ Es liegt die Vermutung nahe, daß diese kleinsten Teilchen nicht mehr ZnS sind, sondern daß beim Mahlen eine chemische Umwandlung stattgefunden hat.

⁶⁾ A. Schleede u. H. Gantzkow, Z. physik. Chem. 105, 37 (1923).

während sich die Blendelinien behaupten bzw. verstärken. Da die Kurvenpunkte aus einer größeren Anzahl Aufnahmen mit verschiedener Grundschwärzung ermittelt wurden, mußten in jeder Aufnahme alle Intensitäten auf die einer charakteristischen Blendelinie bezogen werden, welcher die Intensität 1 gegeben wurde. Es ist dies die Linie mit der Indizierung 220. Der Einfachheit halber sind in den Kurven die ausgewerteten Linien fortlaufend von I—XII durchnummeriert. In den wiedergegebenen Röntgendiagrammen der Abb. 7 ist die gleiche Nummerierung

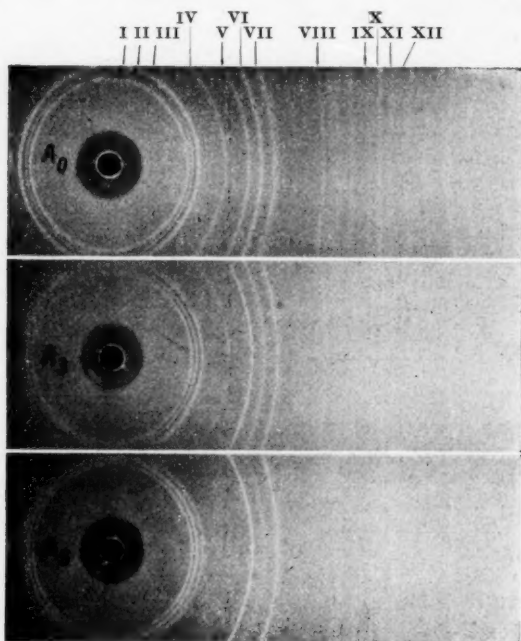


Abb. 7. Übergang der Wurzit- in die Blendestruktur; A-Reihe

vorgenommen. Die gestrichelten Kurven gehören zu den ausgesprochenen Blend-Interferenzen. Beim Vergleich dieser Kurven der B-Reihe mit der Korngrößenkurve wird festgestellt, daß die Umwandlung noch nicht ganz beendet ist, wenn die mittlere Korngröße ihren Grenzwert erreicht hat.

An dieser Stelle sei noch auf eine Röntgenmethode aufmerksam gemacht, welche den ungefähren Verlauf der Korngrößenkurve gut kontrollieren läßt. Bei nicht gedrehten Pulveraufnahmen treten an Stelle der gleichmäßig geschwärtzten Debye-Scherrer-Ringe um so mehr einzelne scharfe Interferenzpunkte, je größer die einzelnen Körner sind; denn bei gleicher Substanzmenge im Röhrchen nehmen mit wachsender Korngröße die Kornzahl und damit die Orientierungsmöglichkeiten ab. Durch Auszählen der Interferenzpunkte in der Flächeneinheit, bzw. auf der Längeneinheit des Interferenzringes, gelangt man

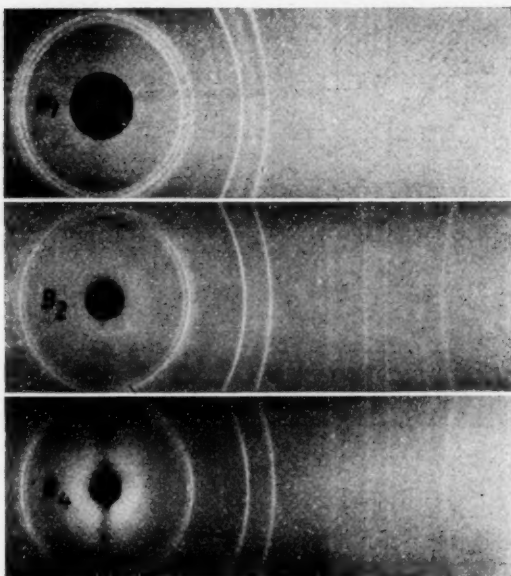


Abb. 8. Übergang der Wurzit- in die Blendestruktur; B-Reihe.

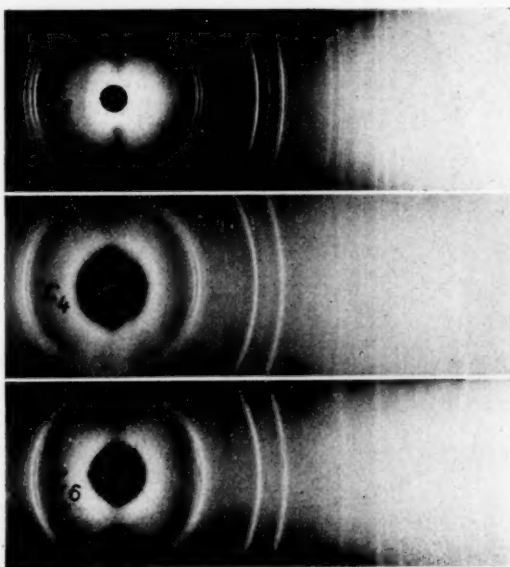


Abb. 9. Übergang der Wurzit- in die Blendestruktur; C-Reihe

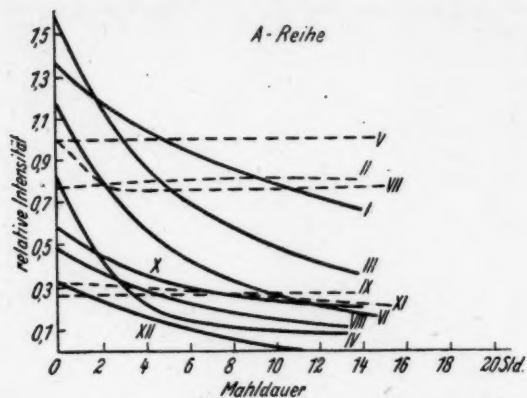


Abb. 10. Die Intensitäten der Röntgeninterferenzen als Funktion der Mahldauer; A-Reihe

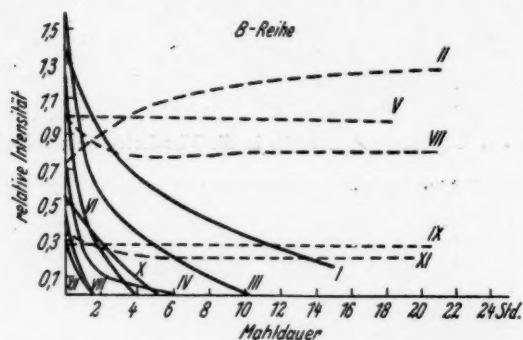


Abb. 11. Die Intensitäten der Röntgeninterferenzen als Funktion der Mahldauer; B-Reihe

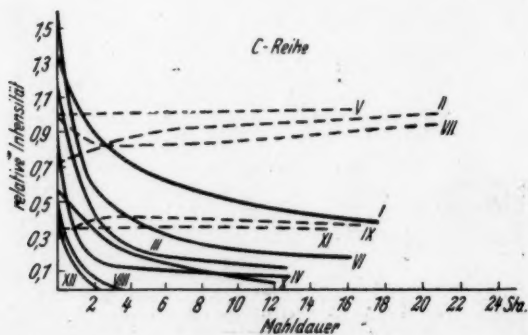


Abb. 12. Die Intensitäten der Röntgeninterferenzen als Funktion der Mahldauer; C-Reihe

in Annäherung zu dem im Abschnitt I dieser Arbeit mitgeteilten Ergebnis in relativen Einheiten. Diese Methode könnte vielleicht zur Feststellung benutzt werden, wie sich beim Zerkleinern die Korngröße der Wurzitteilchen zu denen der umgewandelten Blendeteilchen verhalten. Es wäre dazu allerdings eine große Anzahl von Aufnahmen unter sehr exakten Bedingungen und ein großer Aufwand bei der Auswertung notwendig, um Zufälligkeiten in der Orientierung der Einzelkörner auszuschließen.

III. Die Lichtemission der licht- und kathodenstrahlerregten Mahlfractionen, sowie die spektrale Intensitätsverteilung

A. Lichterregung

Hier wurden einige Versuche unternommen, deren Ergebnisse mehr orientierenden Charakter als Anspruch auf Genauigkeit haben. Sie zeigen jedoch deutlich die Richtung evtl. weiter einzuschlagender Versuche und sollen deshalb kurz besprochen werden. Zur Versuchstechnik ist folgendes zu sagen: Die Proben wurden in dünner Schicht auf eine schwarze Unterlage gebracht und mit dem Licht einer Hg-Lampe bestrahlt. Die visuelle Beobachtung wurde ergänzt durch photographische Aufnahmen der leuchtenden Proben und photometrische Messung der Schwärzungen. Es wurde sowohl während der Erregung beobachtet und photographiert als auch zu verschiedenen Zeiten danach (Nachleuchteffekt).

Das Bild ist ein ganz ähnliches wie bei der Strukturumwandlung; d. h. die Emission nimmt im gleichen Maße ab — und zwar sowohl während der Erregung als auch zu verschiedenen Zeiten danach — wie die Wurzitlinien zurückgehen⁷⁾. Auch hier konnte beobachtet werden, daß die Intensität der *B*-Reihe viel rascher zurückgeht als die der *A*-Reihe, während die *C*-Reihe zwischen beiden liegt.

B. Kathodenstrahlerregung und spektrale Intensitätsverteilung

1. Anordnung und Durchführung der Versuche

Die Elektronenerregung der Substanzen wurde in einer Apparatur vorgenommen, welche nach dem Prinzip der Braunschen Röhre die Auftreffstelle der Elektronen sichtbar macht; d. h. die Leuchtsubstanz ist in so dünner Schicht innen auf der Beobachtungsscheibe des Vakuumrohres aufgebracht, daß die ganze Schicht durcherregt wird und praktisch kein Unterschied besteht, ob man die Lichtemission in der Aufsicht oder in der Durchsicht beobachtet. Weiterhin wurde, auf Vorschlag von Wesch durch Knickung des Elektronenstrahles um 90° durch ein Magnetfeld vermieden, daß störendes Licht der Glühkathode auf die Substanz fällt, was die spektrale Verteilung stark falschen könnte. Diese Methode wurde hier erstmalig in das Phosphoreszenzgebiet eingeführt. Eine ähnliche Anordnung ist bei einer Elektronenbeugungsapparatur von Schoon⁸⁾ beschrieben. Ein Wehnelt zylinder um die Glühkathode diente zur Steuerung der Helligkeit. Zur Erzielung einer möglichst guten Elektronenausbeute wurde auf jede weitere Blende im Strahlengang verzichtet. Mittels zweier magnetischer Linsen konnte die Kathode

⁷⁾ Wenn hier davon abgesehen wird, die Ergebnisse in Kurven (Intensität als Funktion der Mahldauer) darzustellen, so geschieht dies deshalb, weil zu viele den Kurvenverlauf beeinflussende Faktoren — wie Schwarzschildeffekt, spektrale Plattenempfindlichkeit usw. — auftreten, während die Beschreibung nur solche Ergebnisse mittelt, die von diesen Faktoren unabhängig sind.

⁸⁾ Th. Schoon, Diss. Berlin 1937.

bzw. die Wehneltblende auf dem Leuchtschirm punktförmig abgebildet werden. Das Versuchsrohr war innen versilbert und lag auf Anodenpotential = 10 kV. Zur Erzeugung einer Linie befand sich im Strahlengang ein Magnetjoch mit Zeilenablenkspule. An letztere konnte eine Kippspannung oder normale Wechselspannung gelegt werden. Durch Variation der Brennweiten der magnetischen Linsen (Variation der Spulenströme) konnte die Linie mehr oder weniger stark verbreitert werden, wie es für die Spektralaufnahme gerade günstig war. Die Abb. 13 veranschaulicht schematisch den Elektronenteil der Vakuumapparatur. Die auf die Substanz geschriebene Linie wurde sodann auf den Spalt eines Steinheil-Spektrographen projiziert und die spektrale Emission auf der photographischen Platte festgehalten. Die Schwärzungen wurden mittels eines Zeißschen Registrierphotometers in Kurven dargestellt.

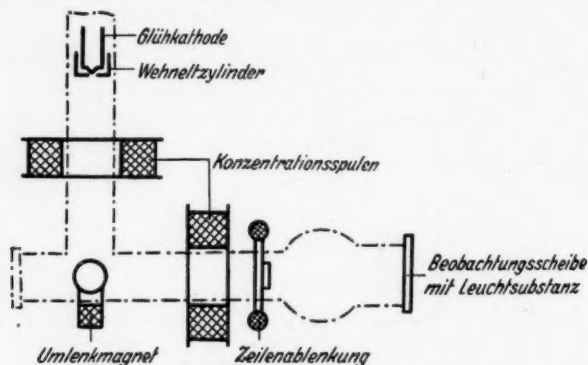


Abb. 13. Apparatur für Kathodenstrahlerregung

2. Versuchsergebnisse

Die Abb. 14 zeigt die unter Berücksichtigung der spektralen Empfindlichkeit der Platte korrigierten Kurven einiger Mahlfractionen. Da es hierbei nur auf die Lage der Banden bzw. ihrer Maxima und nicht auf die absolute Intensität ankommt, ist der Einfachheit halber in den Kurven die Schwärzung als Funktion von der Wellenlänge aufgetragen.

Man sieht deutlich, daß mit fortschreitender Mahldauer eine Verschiebung der grünen Bande nach größerer Wellenlänge stattfindet. Außerdem erscheint mit fortschreitender Mahldauer eine blaue Bande mit dem Maximum bei etwa 465 m μ . Diese Bande stimmt ziemlich gut überein mit der Bande des Grundmaterials (ZnS) im Blendetyp. Das Hervortreten dieser Bande läuft parallel mit der röntgenographisch festgestellten Strukturumwandlung. Auch der Unterschied in den Versuchsreihen tritt deutlich auf. Die spektrale Intensitätsverteilung der Fraktion A_5 entspricht ungefähr der von B_1 , was auch nach den Korngrößen- und Strukturumwandlungskurven zu erwarten ist.

Über die Intensitätsverhältnisse der Lichtemissionen der verschiedenen Fraktionen bei Kathodenstrahlerregung liegen keine Messungen vor. Es wurde aber beobachtet, daß die Intensitätsabnahme mit der Mahldauer wesentlich geringer ist als bei Erregung mit Licht. Außerdem wurde ein „Alterungseffekt“ festge-

stellt. Mit zunehmendem Alter des Mahlgutes geht die Lichtemission stark zurück; und zwar erstreckt sich dieser Vorgang über viele Monate.

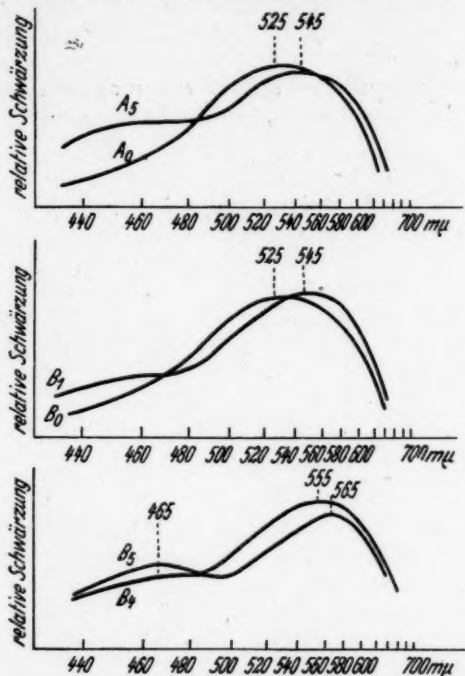


Abb. 14. Emissionsspektrum einiger Mahlfractionen bei Kathodenstrahlerregung

Diese Arbeit wurde begonnen Ende 1941 am Kaiser-Wilhelm-Institut für physikal. Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem. Herrn Prof. Dr. P. A. Thießen, Direktor des Institutes, bin ich für die vielseitige Unterstützung bei der Arbeit zu besonderem Dank verpflichtet. Die Arbeit erfuhr eine längere kriegsbedingte Unterbrechung und konnte am Institut für Weltpost- und Welt-nachrichtenwesen zu Heidelberg fortgeführt und beendet werden. Besonders der Teil III der Arbeit wurde hier ausgeführt. Dem Direktor dieses Institutes, Herrn Prof. Dr. L. Wesch, danke ich für sein förderndes Interesse.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte einen Teil der Untersuchungen durch Bereitstellung von Apparaten und Mitteln.

Nachtrag. — Nach Beendigung der Arbeit erhielt ich Kenntnis von Untersuchungen, durchgeführt von Herrn Dr. F. Wecker, welche demnächst unter dem Titel: „Lumineszenzrückgang und Teilchengröße beim druckzerstörten ZnS-Phosphor“ in den Annalen der Physik veröffentlicht werden. Nach persönlicher Mitteilung ergibt sich eine erfreulich gute Übereinstimmung und gegenseitige Ergänzung der Versuchsergebnisse, soweit eine gewisse Parallele in der Fragestellung besteht.

Heidelberg, Elektroopt. Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Mai 1944).

Über einen vermuteten Effekt des magnetischen Feldes auf die Ultraschallgeschwindigkeit

Von Werner Schaaffs

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Es wird ein Versuch darüber angestellt, ob paramagnetische Flüssigkeiten in starken Magnetfeldern eine Änderung der Ultraschallgeschwindigkeit aufweisen. Konzentrierte Lösungen von Eisensulfat, Eisenchlorür, Kaliumferrocyanid, ferner Nitrobenzol zeigen keinen Effekt, obwohl Schallgeschwindigkeitsänderungen von $\frac{1}{4}\%$ noch mit Sicherheit nachzuweisen gewesen wären. Daraus folgt, daß eine von Rama Rao aufgestellte Theorie, nach der Nitrobenzol eine Änderung von 3–4% zeigen sollte, unzutreffend ist.

Rama Rao hat eine Theorie aufgestellt¹⁾, nach der die Schallgeschwindigkeit paramagnetischer Flüssigkeiten sich in einem magnetischen Felde ändern soll. Er legt seinen Überlegungen eine van Laar zugeschriebene Form der Zustandsgleichung zugrunde und nimmt auf Grund einer Verknüpfung bekannter thermodynamischer Beziehungen mit dem Curieschen Gesetz für paramagnetische Substanzen an, daß die in dieser Zustandsgleichung auftretende spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v in einem magnetischen Felde eine Steigerung um den Betrag aH^2/T^2 erfährt. Darin ist a eine Konstante, H die magnetische Feldstärke, T die absolute Temperatur. Er erhält so für die relative Änderung Δu der Schallgeschwindigkeit u den Betrag $\Delta u/u = 0,5 \sigma H/Tc_v$, wobei σ das magnetische Moment pro Mengeneinheit der Flüssigkeit ist, und berechnet für Nitrobenzol bei gewöhnlicher Temperatur eine Änderung von 3–4%.

Gegen die Berechnung ist u. a. einzuwenden, daß Nitrobenzol nicht paramagnetisch ist.

Nach Untersuchungen des Verfassers²⁾ hat sich ergeben, daß die Schallgeschwindigkeit in sehr engem Zusammenhang mit der Raumbfüllung r der Moleküle steht und daß dieser Zusammenhang einfacher ist, als er sich auf Grund bekannter Zustandsgleichungen vermuten läßt, nämlich $u = W \cdot r$. W ist für viele Stoffe eine Konstante. Da nicht ersichtlich ist, auf welche Größe ein Magnetfeld — jedenfalls bei Flüssigkeiten und bei gewöhnlichen Temperaturen — einen meßbaren Einfluß haben soll, ist die Existenz eines Effektes des magnetischen Feldes auf die Ultraschallgeschwindigkeit zu verneinen.

¹⁾ Rama Rao „On a magneto-acoustic effect“, Physic Rev. (2) **60**, 156–157 (1941), siehe auch Physik. Ber. **9**, 665 (1943).

²⁾ W. Schaaffs, Untersuchungen über Schallgeschwindigkeit und Konstitution, II. u. III. Teil, Z. physik. Chem. **194**, 39–50 und 66–85 (1944).

Gleichwohl ist die Fragestellung von Rama Rao nicht uninteressant und es liegt daher nahe, den entsprechenden Versuch bei geeigneten paramagnetischen Flüssigkeiten, und zwar konzentrierten Eisensalzlösungen zu machen.

Die Versuchsanordnung ist aus der Abbildung zu ersehen. Zwischen den 60 mm langen Polschuhen *PP* eines Elektromagneten befindet sich ein gewöhnliches Reagenzröhrchen *R* von 8 mm lichter Weite. Dieses Reagenzröhrchen und das weite Glasrohr *G* werden von einem Stopfen *St* getragen. *G* und *R* sind mit der Versuchsflüssigkeit *A* gefüllt. In das Glasrohr *G* und die Flüssigkeit *A* taucht eine hohle Dose *D* mit dem Schwingquarz *Q* ein. Zur besseren Ausbildung stehender Ultraschallwellen kann die Dose *D* mit dem Quarz *Q* mit Hilfe einer Schraube *Sch* mit Feingewinde relativ zu dem als Reflektor dienenden Vollzylinder *Z* verschoben werden.

Das von einem etwa 650 mm entfernten beleuchteten horizontalen Spalt *Sp* kommende Licht durchsetzt das Reagenzröhrchen *R* mit der Versuchsflüssigkeit, wird in einer der Achse des Röhrchens parallelen Brennpunktlinie *B* gesammelt und divergiert dann, wie es im unteren Teil der Abbildung für eine zur Schallrichtung senkrechte und zu den Wellenflächen parallele Ebene gezeichnet ist. Beobachtet wird das Amplitudengitter der Schallwelle.

Die magnetische Feldstärke in der Mittelachse des Röhrchens wurde mit einer ballistischen Methode bestimmt und betrug maximal 10400 Gauß.

Nach dem Einschalten des Senders zur Erregung des Quarzes mit einer Frequenz von etwa 4 MHz wird die Schraube *Sch* verstellt, bis die horizontalen Streifen des Amplitudengitters in einer nahe der Brennpunktlinie *B* gelegenen Ebene *E*₁ scharf erscheinen. Mittels einer Lupe, die einen großen Teil des Schallfeldes zu überblicken gestattet, untersucht man dann die Homogenität des Schallfeldes und die Güte der Linien. Die Beobachtung bzw. Messung geschieht in einer etwa 400 mm entfernten Ebene *E*₂ mit einer mit Fadenkreuz versehenen Lupe *L*, die senkrecht zur Zeichenebene mittels einer sehr genauen Mikrometerschraube verschiebbar ist. In dem Bereiche, in dem das Magnetfeld auf die Ultraschallwelle wirkte, wurden 250 helle Streifen beobachtet. Der horizontale Faden des Fadenkreuzes wurde sowohl im oberen wie im unteren Teile des Feldes mit der Mitte einer Linie zur Deckung gebracht, doch ergab sich nach Einschalten des Magnetfeldes nicht die geringste Linienverschiebung. Eine Verschiebung um $\frac{1}{16}$ des Abstandes zweier Linien wäre noch nachzuweisen gewesen. Daraus folgt, daß eine Wellenzahl- bzw. Schallgeschwindigkeitsänderung von $0,25\%$ noch mit Sicherheit nachzuweisen gewesen wäre.

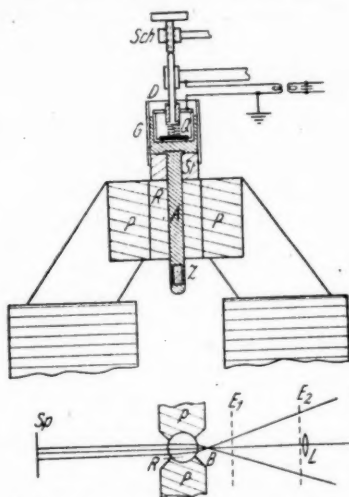


Abb. 1. Versuchsanordnung zum Nachweis einer Einwirkung des magnetischen Feldes auf die Ultraschallgeschwindigkeit

Diese Untersuchungen wurden bei einer Temperatur von 26°C an gesättigten Lösungen von Eisensulfat, Eisenchlorür und Kaliumferrocyanid, bei denen noch am ehesten ein Effekt zu erwarten gewesen wäre, vorgenommen. Auch an den diamagnetischen Substanzen Wasser und konzentrierter Natriumchloridlösung und nicht zuletzt an der diamagnetischen Flüssigkeit Nitrobenzol ließ sich keine Einwirkung des transversalen Magnetfeldes auf die Ultraschallgeschwindigkeit nachweisen. Nach Abänderung der Optik wurden die Beugungsbilder 1. bis 5. Ordnung des Schallgittereffektes der Eisensalzlösungen beobachtet, aber auch keine Andeutung der Veränderung der Absorption der Schallwellen im Magnetfeld erhalten.

Folgende Fehlerquellen, die einen Effekt vortäuschen können, sind zu beachten. Der Quarz Q ist induktiv lose, nicht galvanisch, an den Sender anzukoppeln; die äußere Belegung (Metalldose D) ist dabei zu erden. Anderenfalls kann es vorkommen, daß beim Einschalten des Elektromagneten die Intensität der Schallabstrahlung unkontrollierbaren Änderungen ausgesetzt ist, Zieherscheinungen auftreten, einzelne Bereiche des Schallstrahles eine Phasenverschiebung gegen andere erhalten und so zu Verschiebungen des Amplitudengitters Anlaß geben. Die Polschuhe des Elektromagneten sollen zwar gut am Glasröhrchen R anliegen, dieses aber soll nicht darin klemmen, um zu vermeiden, daß durch noch so geringe Druckveränderungen beim Einschalten mechanische Deformationen des Röhrchens eintreten, die durch Veränderungen des Strahlenganges des Lichtes Effekte vortäuschen.

Berlin-Siemensstadt, Rieppelstr. 20.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. 1. 1948.)

Zur Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung von Nickel¹⁾

Von W. Jellinghaus und H. Schlechtweg

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Das Temperatugesetz der Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe, das Weiß aus der Langevinschen Theorie der Paramagnetica durch Einführung eines inneren Feldes WJ mit konstantem W erhalten hatte, wurde an Hand der von P. Weiß und R. Forrer ausgeführten Messungen der Magnetisierung des Nickels in einem großen Temperaturbereich auf seine Gültigkeit geprüft. Die Zahl J_∞ , die die Magnetisierung beim absoluten Nullpunkt ergibt, wurde durch Gegenüberstellung der theoretisch berechneten Verhältniszahlen J/J_∞ und des praktisch gefundenen J innerhalb des Bereiches von $0,75 \leq \frac{J}{J_\infty} \leq 1$ als eine Kon-

stante gefunden in Übereinstimmung mit der Theorie. Der Zahlenfaktor W des Weißschen Feldes wurde auf drei verschiedenen Wegen berechnet, von denen jeder im Widerspruch zur Theorie zu anderen Ergebnissen führte. Während nämlich die Berechnung sowohl aus Kurven $J = \text{constans}$ als auch aus der Feldstärkenabhängigkeit der Magnetisierung $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T$ zu einer Reihe mit der Temperatur ansteigender Zahlen für W führt, ergibt der dritte Weg über die Temperaturabhängigkeit von J bei konstantem H wenigstens einen konstanten Wert für den Faktor W , der aber größer ist als der auf den beiden anderen Wegen gefundene.

Ein Versuch zur besseren Anpassung des Temperatugesetzes an das vorliegende Versuchszahlenmaterial durch Einführung eines temperaturabhängigen magnetischen Momentes p pro Atom führt zu Werten, die physikalisch nicht sinnvoll erscheinen. Weiterhin wurde versucht, an Stelle des konstanten Weißschen Feldes W dieses als mit T und J veränderlich anzusetzen. Die aus dem Versuch entnommenen Werte von $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_H$, $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T$ und der auf Linien $T = \gamma H$

des H - T -Feldes gebildeten Ableitung $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_{T=\gamma H}$ führen jedoch nicht zu der gleichen Abhängigkeit des Weißschen Feldes von Temperatur und Magnetisierung. Es ist also nicht möglich, auf diesem Wege eine widerspruchslöse Beschreibung des experimentellen Tatbestandes zu erhalten.

I. Die Langevinsche Theorie, das Weißsche Feld und die magnetische Zustandsgleichung

Nach der Theorie von Langevin²⁾ ist die Magnetisierung der Volumeneinheit gleich der Summe der Produkte aus den magnetischen Momenten p der Atome

¹⁾ Die Rechnung wurde von W. Jellinghaus durchgeführt.

²⁾ Vgl. z. B. Becker-Döring, Ferromagnetismus. Springer, Berlin 1939.

und den Cosinus der Winkel zwischen der Richtung des Feldes H und der Richtung des Moments des einzelnen Atoms; also

$$J = p (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_3 \cdots + \cos \vartheta_n) \quad (1)$$

oder $J = n \cdot p \cdot \cos \vartheta$, wobei $\overline{\cos \vartheta}$ das Mittel über alle einzelnen $\cos \vartheta$ bedeutet. Bei der Sättigung am absoluten Temperaturnullpunkt fallen die Richtungen der Momente sämtlicher Atome mit der Feldrichtung zusammen; infolgedessen ist

$$J_\infty = n p \quad (2)$$

$$\frac{J}{J_\infty} = \overline{\cos \vartheta} = 1. \quad (3)$$

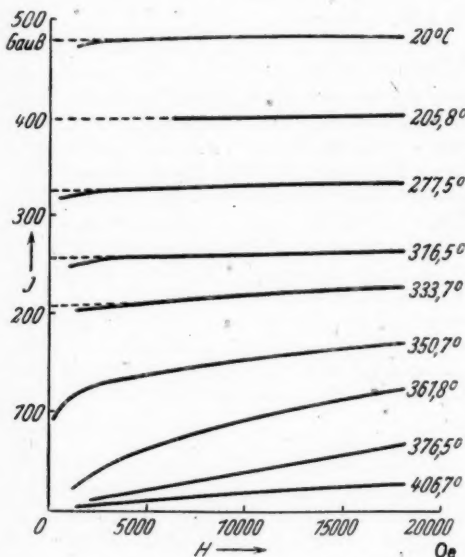


Abb. 1. Die Magnetisierung von Nickel bei verschiedenen Temperaturen

Die Magnetisierung bei der Temperatur T , bezogen auf die Magnetisierung J_∞ bei $T = 0$, wird also durch die einfache Formel

$$\frac{J}{J_\infty} = L(\alpha) = L\left(\frac{p \cdot H}{k \cdot T}\right) \quad (4)$$

bestimmt. Nach Weiß kommt bei ferromagnetischen Stoffen zu dem Felde H noch ein weiterer Betrag hinzu, der proportional zu einer stofflich bedingten Konstanten W und der Größe der Magnetisierung J angesetzt wird; das Produkt $W \cdot J$ ist das Weißsche Feld. Im Sinne der Weißschen Theorie wird angenommen, die Größe W sei unabhängig von H , T und J . Die Grundgleichung dieser Weißschen Theorie lautet also

$$\frac{J}{J_\infty} = L(\alpha) = L\left[\frac{p(H + WJ)}{kT}\right] \quad (5)$$

Ein Atom mit einem Moment p und einem Winkel ϑ zwischen der Richtung des Moments und der des Feldes besitzt eine potentielle Energie $p \cdot H \cdot \cos \vartheta$, maximal also $p \cdot H$. Andererseits ist die thermische Energie der Atome im Durchschnitt $k \cdot T$, wobei k die Boltzmannsche Konstante ($1,37 \cdot 10^{-16}$ erg) und T die Temperatur ist. Das Verhältnis dieser beiden Energien heiße $\alpha = \frac{p \cdot H}{k \cdot T}$.

Von Langevin wurde mittels der statistischen Mechanik gezeigt, daß der Mittelwert $\overline{\cos \vartheta}$ eine Funktion $L(\alpha)$ ist und insbesondere, daß, wenn die in p enthaltene Quantenzahl den Betrag von $1/2$ hat, diese Funktion $L^{1/2}(\alpha) = \mathfrak{Lg} \alpha$ ist.

und im Sonderfalle $j = \frac{1}{2}$:

$$\frac{J}{J_{\infty}} = \mathfrak{I}g \left[\frac{p(H + WJ)}{kT} \right].$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung soll im folgenden an der Erfahrung, nämlich an den von P. Weiß und R. Forrer³⁾ ausgeführten Messungen der Magnetisierung des Nickels geprüft werden. Es sind also Zahlenwerte für J bzw. σ (letztere auf die Masseneinheit bezogen) bei verschiedenen zugehörigen Werten von H und T gegeben. H ist bei Weiß und Forrer als äußeres Feld angegeben; mittels des angegebenen Entmagnetisierungsfaktors ist das wahre Feld zu berechnen. Weiß und Forrer nehmen den Entmagnetisierungsfaktor im ganzen beobachteten Temperaturbereich als konstant an, also unabhängig von der Suszeptibilität α , die ja bei Annäherung an den Curiepunkt bekanntlich klein wird. Aus den gegebenen Werten müssen die Konstanten des Gesetzes (5) ermittelt werden, nämlich p , W und J_{∞} . Diese Werte sind dann im ganzen Temperatur- und Feldstärkenbereich auf ihre Konstanz zu prüfen (Abb. 1).

II. Differentiation der Zustandsgleichung und Ermittlung

der Konstanten J_{∞} aus $\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H$

Zuerst führen wir eine in der Gl. (5) nicht enthaltene Größe, nämlich die Curie-temperatur, ein. Erfahrungsgemäß ist die Temperatur, bei der die Magnetisierung den Wert Null erreicht, nahezu unabhängig vom Felde H . Es gilt also für die Curie-temperatur Θ die Gleichung

$$\frac{J_{\Theta}}{J_{\infty}} = 0 = \mathfrak{I}g \alpha. \quad (6)$$

Da der Differentialquotient $\frac{d \mathfrak{I}g \alpha}{d \alpha}$ in der Nähe von $\alpha = 0$ gleich 1 wird, gilt, da im allgemeinen $H \ll WJ$ ist (J beträgt bis dicht vor dem Curiepunkt einige Hundert H und W ist von der Größenordnung 10000),

$$\left(\frac{d \mathfrak{I}g \alpha}{d \alpha} \right)_{\alpha=0} = \left[\frac{d \left(\frac{J}{J_{\infty}} \right)}{d \left(\frac{pWJ}{kT} \right)} \right]_{\alpha=0} = 1; \quad (7)$$

hierdurch wird eine Temperatur $T = \Theta$ definiert, für die gilt:

$$\frac{pWJ_{\infty}}{k\Theta} = 1.$$

Wir führen noch die reduzierte Temperatur $\vartheta = \frac{T}{\Theta}$ und die reduzierte Magnetisierung $\frac{J}{J_{\infty}} = \eta$ ein; die umgeformte Zustandsgleichung (5) lautet dann:

$$\eta = \mathfrak{I}g \left(\frac{p(H + W\eta J_{\infty})}{k \cdot \vartheta \cdot \Theta} \right) = \mathfrak{I}g \left(\frac{pH}{k\vartheta\Theta} + \frac{\eta}{\vartheta} \right). \quad (8)$$

³⁾ P. Weiß u. R. Forrer, Ann. Phys. 5, 153ff., 10. Serie, Paris (1926).

Für den Fall, daß $H \ll WJ$ ist, wird hieraus

$$\eta = \Im g \frac{\eta}{\vartheta} \quad \text{oder} \quad \Re \Im g \eta = \frac{\eta}{\vartheta}.$$

Um zu den gesuchten Konstanten, insbesondere zu J_∞ zu kommen, werde die Zustandsgleichung (5) differenziert:

$$\frac{dJ}{J_\infty} = L'(\alpha) \cdot \left[\frac{p dH}{kT} - \frac{p(H + WJ) dT}{kT^2} + \frac{pW dJ}{kT} \right] \quad (9)$$

oder nach Einführung von $k \cdot \Theta = p W J_\infty$:

$$\frac{dJ}{J_\infty} \left[1 - \frac{\Theta L'(\alpha)}{T} \right] = L'(\alpha) \left[\frac{p dH}{kT} - \frac{p(H + WJ) dT}{kT^2} \right].$$

Wir setzen der Reihe nach je eines der drei Differentiale dJ , dH , dT gleich Null und erhalten Gleichungen mit den partiellen Differentialquotienten der übrigen Differentialen. Zur Abkürzung schreiben wir noch in üblicher Weise

$$\Lambda = \frac{L'(\alpha)}{\frac{T}{\Theta} - L'(\alpha)} \quad (10)$$

und erhalten dann

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_J &= \frac{H + WJ}{T}, \\ \text{b)} \quad \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T &= \Lambda \cdot \frac{1}{W}, \\ \text{c)} \quad \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_H &= -\frac{J}{T} \left(1 + \frac{H}{WJ} \right) \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Größe Λ werde nun als Funktion von η und ϑ bestimmt. Wegen

$$\frac{d \Im g \alpha}{d\alpha} = \frac{1}{\Theta \vartheta^2 \alpha} \quad (12)$$

wird mit $H \ll WJ$

$$\Lambda = \frac{\frac{1}{\Theta \vartheta^2 \alpha}}{\frac{T}{\Theta} - \frac{1}{\Theta \vartheta^2 \alpha}} = \frac{1}{\vartheta^2 \alpha \cdot \vartheta - 1}. \quad (13)$$

Da

$$\alpha = \Re \Im g \frac{J}{J_\infty} \quad (14)$$

und

$$\Re \Im g x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (15)$$

findet man

$$\Lambda = \frac{1}{\left(e^\alpha + e^{-\alpha} \right)^2 \vartheta - 1}.$$

Hieraus entsteht

$$\Lambda = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{J}{J_\infty}}{1-\frac{J}{J_\infty}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{J}{J_\infty}}{1-\frac{J}{J_\infty}} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{J}{J_\infty}}{1-\frac{J}{J_\infty}} + e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{J}{J_\infty}}{1-\frac{J}{J_\infty}}}}{2}} \cdot x^{\vartheta-1} \quad (16)$$

oder nach einfacher Umrechnung

$$A = \frac{1}{\frac{\eta}{1-\eta^2} - 1} = \frac{1-\eta^2}{\frac{\eta}{\text{Mr } \chi_0} - (1-\eta^2)} \quad (17)$$

Tabelle 1

$$A = f(\eta) = \frac{1-\eta^2}{\frac{\eta}{\text{Mr } \chi_0} - (1-\eta^2)}$$

η	A	η	A	η	A	η	A
0,00	∞	0,55	3,623	0,74	1,389	0,88	0,5448
0,05	588,	0,58	3,120	0,75	1,312	0,90	0,451
0,10	141,4	0,60	2,83	0,76	1,240	0,92	0,3612
0,2	30,0	0,62	2,563	0,78	1,105	0,94	0,2703
0,3	11,98	0,65	2,208	0,80	0,979	0,95	0,2314
0,4	8,08	0,66	2,110	0,82	0,860	0,96	0,1892
0,45	6,096	0,68	1,900	0,83	0,749	0,98	0,1014
0,5	4,69	0,70	1,715	0,85	0,6973	1,00	0,00
0,52	4,231	0,72	1,540	0,86	0,6435		

Die auf diesem Wege errechneten Beträge von A als Funktion von η sind in Tab. 1 tabuliert. Wir greifen auf Gl. (11c) zurück, in der wir A als Funktion zusammengehöriger Werte von J , T und $\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H$ finden:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H = -\frac{J}{T} \left(1 + \frac{H}{WJ}\right) A$$

oder wegen $H \ll WJ$:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{J} = -A. \quad (18)$$

Da nun A theoretisch als Funktion von η und experimentell als Funktion von J und T bekannt ist, so ergibt sich

$$J_\infty = \frac{J_{\text{exp.}}}{\eta_{\text{theor.}}} = \frac{J_{\text{exp.}}}{\varphi(A)}, \quad (19)$$

wobei $\varphi(A)$ die Umkehrfunktion von Gl. (17) ist. Wenn die Theorie richtig sein soll, so muß sich aus (19) der Wert J_∞ unabhängig von $J_{\text{exp.}}$ ergeben.

Wir berechnen also für konstantes H aus den vorliegenden Messungen die Ableitungen $\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H$ mitsamt den zugehörigen Werten von J und T und berechnen weiter die Größe A als Funktion von J (Tab. 2). Aus der graphischen Darstellung, in der A über η und über J aufgetragen ist, oder genauer aus Tab. 3, können die zusammengehörigen Werte von J und η und damit der Betrag von J_∞ entnommen werden (Abb. 2). In dem Bereich der η -Werte von etwa 0,75 aufwärts bis 1,0 ergibt sich J_∞ praktisch als konstant, nämlich

$$\left. \begin{aligned} J_\infty &= 55,8 \cdot \varrho = 494, \\ \varrho &= \text{Dichte} = 8,85 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

so daß diese notwendige, jedoch noch keineswegs hinreichende Bedingung für die praktische Brauchbarkeit der vorliegenden Theorie erfüllt ist. (Bei Weiß und Forrer sind die Werte von σ , also spezifische Magnetisierung, angegeben.) Der η -Bereich

Tabelle 2

Berechnung von Λ aus dem Versuch; $\Lambda = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{J}$

T in °K	H = 8500			H = 16000		
	σ	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H$	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$	σ	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H$	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$
309,9	54,03	0,0317	0,1818	54,16	0,0329	0,1884
351,9	52,52	0,0387	0,2582	52,56	0,0377	0,2550
403,5	50,34	0,0518	0,4152	50,51	0,0513	0,4099
435,17	48,43	0,0622	0,5586	48,60	0,0626	0,5606
451,85	47,34	0,0784	0,748	47,52	0,0754	0,726
462,50	46,54	0,0769	0,764	46,72	0,0787	0,779
473,4	45,68	0,0836	0,866	45,89	0,0760	0,784
484,02	44,76	0,0891	0,964	45,01	0,0891	0,958
494,5	43,76	0,1015	1,148	44,03	0,0986	1,107
505,0	42,70	0,1034	1,227	42,92	0,1054	1,238
515,2	41,61	0,1072	1,328	41,87	0,1074	1,322
525,4	40,44	0,1222	1,588	40,70	0,1202	1,552
535,50	39,13	0,1379	1,880	39,44	0,1299	1,765
545,50	37,72	0,1459	2,110	38,03	0,1508	2,161
561,31	—	—	—	35,57	0,1697	2,68
575,97	—	—	—	32,94	0,1941	3,395
582,76	31,04	0,228	4,28	31,60	0,2120	3,91
589,49	29,37	0,2508	5,03	30,04	0,2362	4,64
600,01	26,50	0,2992	6,78	27,35	0,2792	6,13
610,47	22,88	0,386	10,28	24,03	0,348	8,83
621,77	17,667	0,536	18,82	19,578	0,438	13,88
634,73	10,238	0,602	37,30	13,244	0,526	25,20
645,77	4,797	0,277	37,30	8,027	0,367	29,47
654,98	3,041	0,133	28,63	5,468	0,218	26,10

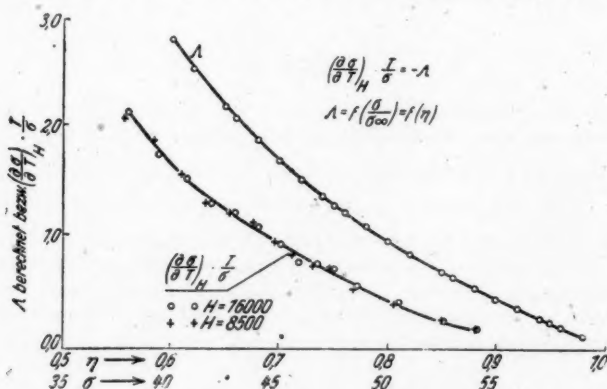


Abb. 2. Λ als Funktion des theoretisch berechneten η und als Funktion des beobachteten σ

Tabelle 3

Berechnung von σ_{∞} aus den beobachteten Werten von σ und $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$ durch Gleichsetzung von $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$ mit einem theoretisch berechneten Λ , dessen zugehöriger η -Wert durch Interpolation gefunden wird

$H = 8500$				$H = 16000$			
$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$	$\eta_{\text{theor.}}$	$\sigma_{\text{exp.}}$	$\frac{\sigma_{\text{exp.}}}{\eta_{\text{theor.}}} = \sigma_{\infty}$	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{\sigma}$	$\eta_{\text{theor.}}$	$\sigma_{\text{exp.}}$	$\frac{\sigma_{\text{exp.}}}{\eta_{\text{theor.}}} = \sigma_{\infty}$
0,1818	0,9617	54,03	56,20	0,1884	0,9602	54,16	56,40
0,2582	0,9431	52,52	55,70	0,2550	0,9439	52,56	55,68
0,4152	0,9080	50,34	55,40	0,4099	0,9092	50,51	55,59
0,5586	0,8772	48,43	55,23	0,5606	0,8768	48,60	55,42
0,748	0,8402	47,34	56,14	0,726	0,8444	47,52	56,24
0,764	0,8373	46,54	55,60	0,779	0,8346	46,72	55,98
0,866	0,8190	45,68	55,78	0,784	0,8337	45,89	55,02
0,964	0,8025	44,76	55,80	0,958	0,8035	45,01	56,01
1,148	0,7736	43,76	56,60	1,107	0,7797	44,03	55,10
1,227	0,7619	42,70	56,02	1,238	0,7603	42,97	56,47
1,328	0,7479	41,61	55,63	1,322	0,7487	41,87	55,93
1,588	0,7145	40,44	56,60	1,552	0,7157	40,70	56,83
1,880	0,6822	39,13	57,40	1,765	0,6946	39,44	56,75
2,110	0,6606	37,72	57,10	2,161	0,6548	38,03	56,06
				2,68	0,6112	35,57	58,20
				3,39	0,5639	32,94	58,40
				3,91	0,5358	31,60	52,01
				4,64	0,5022	30,04	59,80
				6,13	0,4491	27,35	60,92

zwischen 0,75 und 1 entspricht etwa einem

$$\vartheta = \frac{\eta}{\text{Ar } \Im g \eta} = 0,77$$

bzw. einer Kelvintemperatur von 515° (242° C).

Aus den η - und $\text{Ar } \Im g \eta$ -Werten ergibt sich über $\frac{T}{\Theta} = \frac{\eta}{\text{Ar } \Im g \eta}$ auch die Curietemperatur. Im Mittel finden wir (vgl. Tabelle 6) 658° K; diese Temperatur liegt um einige Grade höher als der bei Becker und Döring mit 650° K angegebene paramagnetische Curiepunkt; beschränkt man sich in Tabelle 6 auf das Intervall $0,75 \leq \eta \leq 1$, in dem die Theorie allein gelten kann, so findet man einen noch etwas höheren Wert von etwa 665° K.

III. Ermittlung des Weißschen Faktors W aus der Feldstärkenabhängigkeit von J und T

Die nächste Konstante der Zustandsgleichung, nämlich W , ist, so lange die Zustandsgleichung streng gültig ist, auf verschiedenen Wegen zugänglich. Auf den ersten Blick scheint ein ganz einfacher Weg zu W zu führen. Wir setzen $J = \text{const}$ und $p = \text{const}$ und erhalten

$$\frac{J}{J_{\infty}} = \Im g \frac{p(H + WJ)}{kT} = \text{const}; \quad (21)$$

hieraus folgt

$$\left(\frac{H + WJ}{kT}\right)_{p = \text{const}} = \text{const}$$

und weiter für die Wertepaare H_1, T_1 und H_2, T_2 :

$$W = \frac{H_2 T_1 - H_1 T_2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{J} \quad (22)$$

Bei der Wahl der zu gleichem J zugehörigen Wertepaare H_1, T_1 und H_2, T_2 ist jedoch bezüglich der Feldstärken zu beachten, daß bei kleinen Feldstärken die Magnetisierung noch unterhalb der spontanen Magnetisierung liegt; diese Meßpunkte unterhalb des Knies der Magnetisierungskurve können also zu diesem Zweck nicht verwendet werden. Oberhalb des Knies verlaufen aber die zu niedrigen Temperaturen gehörenden Isothermen nahezu parallel zu den Geraden $\sigma = \text{const}$; leider haben Weiß und Forrer die Isothermen nur mit ziemlich großen Temperaturabständen gemessen. Infolgedessen finden sich unter $277,5^\circ\text{C}$, einer Temperatur, die dem Curiepunkt (358°C) schon ziemlich nahe liegt, keine Isothermenpaare, die die gleiche Gerade $\sigma = \text{const}$ schneiden.

Tabelle 4

Berechnung von W aus $\frac{H_2 T_1 - H_1 T_2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{J} = W$.

H_1, T_1 und J werden den Messungen von Weiß und Forrer entnommen, H wird auf wahres H umgerechnet; für H_2 wird eine gewisse Feldstärke vorgegeben und die zugehörige Temperatur T_2 aus zu gleichem H gehörigen Werten von J interpoliert. Bei höheren Temperaturen werden die zu gleichen J -Werten gehörigen Feldstärken H aus den Isothermen interpoliert

$^\circ\sigma$	H_1	T_1 in $^\circ\text{K}$	H_2	T_2 in $^\circ\text{K}$	$W \cdot \varrho$	W
54,55	7930	293	15650	297,6	8960	1013
51,56	8048	377	15765	379,9	19350	2189
46,94	8230	457,30	15990	459,87	31200	3530
36,60	7130	552,48	18453	556,34	44200	5000
28,60	1828	589,50	15483	595,25	51000	5776
13,00	3676	625,53	8332	629,27	59615	6743
13,00	3676	625,53	15526	634,84	61840	6997
4,00	3892	638,36	16968	664,16	80075	9046

Tabelle 5

Berechnung von W . $\left(\frac{dJ}{dH}\right)_T = \frac{1}{W} \cdot A$, daher $W = \frac{A}{\left(\frac{dJ}{dH}\right)_T}$

$T^\circ\text{C}, T^\circ\text{K}$	$\sigma_H = 8500$	$\sigma_H = 16000$	$d\sigma/dH$	A	$W \cdot \varrho$	W
20/293	54,56	54,71	$20,0 \cdot 10^{-6}$	0,150	7500	848
53,8 / 326,8	53,49	53,60	$14,7 \cdot 10^{-6}$	0,240	16300	1843
104,0 / 377,0	51,55	51,71	$21,3 \cdot 10^{-6}$	0,325	15500	1753
151,0 / 424,0	49,12	49,30	$24,0 \cdot 10^{-6}$	0,565	21000	2376
173,35/446,35	47,73	47,90	$22,7 \cdot 10^{-6}$	0,640	28200	3190
195,10/468,10	46,12	46,29	$22,7 \cdot 10^{-6}$	0,815	35900	4060
247,35/520,35	41,06	41,31	$33,3 \cdot 10^{-6}$	1,47	44200	5000
277,50/550,50	36,99	37,38	$52,0 \cdot 10^{-6}$	2,50	48000	5432
308,80/581,80	31,26	31,81	$73,3 \cdot 10^{-6}$	3,623	49500	5590

Bei niedrigen Temperaturen ist man daher gezwungen, sich die Werte von H und T für konstantes J durch Interpolation zu beschaffen. Wir ersehen aus Tabelle 4, daß der Faktor W des Weißschen Feldes, sofern man ihn in der oben angegebenen Weise berechnet, mit steigender Temperatur ansteigt. Ein solches Ergebnis läßt jedoch nicht mehr die auf Gl. (9) beruhende Methode der Auswertung zu, so daß in dem vorstehend eingeschlagenen Verfahren ein innerer Widerspruch steckt.

Ein weiterer Weg zur Bestimmung von W führt über die oben bereits abgeleitete Gl. (11b):

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T = \frac{A}{W}.$$

Man gewinnt also $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T$ durch Differenzierung der praktisch geradlinig verlaufenden Isothermen, ermittelt das mittlere J , gewinnt η durch Division von J mit J_∞ , errechnet hieraus nach Gl. (17) den zugehörigen Wert von A und findet dann W (Tabelle 5). Auch die auf diesem Wege gefundenen Werte von W steigen mit der Temperatur merklich an; sie stimmen, wie Abb. 3 zeigt, mit den aus den Linien $J = \text{const}$ gefundenen Zahlen annähernd überein. Hierdurch ist der noch zwischen Versuch und Theorie bestehende Widerspruch erneut dargelegt.

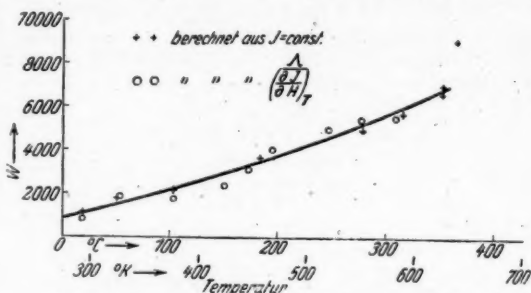


Abb. 3. Berechnete Werte des Weißschen Feldes W in Abhängigkeit von der Temperatur

IV. Ermittlung des Weißschen Faktors aus der Temperaturabhängigkeit von J

Bei den beiden bisher genannten Verfahren ist bezüglich der Größe p nur vorausgesetzt worden, daß sie konstant, d. h. unabhängig von H , T und J ist. Ihr Zahlenbetrag ging in die Rechnung nicht ein. Ein weiteres gemeinsames Kennzeichen dieser Verfahren ist die Benutzung von Funktionen, die das Feld H als wesentliche bestimmende Variable enthalten. Nun ist aber, wie oben bereits angedeutet, die Magnetisierung weit stärker von der Temperatur T als vom Felde H abhängig; denn wir können durch Veränderung von T zwischen 0°K und dem Curiepunkt alle Werte der Magnetisierung zwischen 0 und J_∞ bzw. alle Werte von η zwischen 0 und 1 erreichen, während durch Veränderung von H innerhalb des experimentell bekannten Bereiches die Magnetisierung nur wenig geändert wird. Das dritte Verfahren zur Bestimmung von W benutzt die durch die vorstehenden Rechnungen schon hinlänglich gestützte Voraussetzung, daß das Feld H von kleinerer Größenordnung ist als das Produkt $W \cdot J$. Unter dieser Voraussetzung ($H \ll WJ$) ist

$$\frac{J}{J_\infty} = \eta = L(\alpha) = \mathfrak{I}g \alpha = \mathfrak{I}g \frac{p(H + WJ)}{kT} \sim \mathfrak{I}g \frac{pWJ}{kT}$$

und daher

$$W = \frac{\alpha \cdot k \cdot T}{p \cdot J} = \frac{\mathfrak{A} \mathfrak{I}g \eta \cdot k \cdot T}{p \cdot J}. \quad (23)$$

Wir benutzen die für ein ziemlich großes H , nämlich 16000 Oe, bekannten Werte von J , berechnen η und $\Re \Im \eta$ und gewinnen zunächst das Produkt $p \cdot W$. Für p wird unter Benützung der Quantenzahl $j = 0,5$ gemäß

$$p = j \cdot \mu_B \quad (\mu_B = 923 \cdot 10^{-23} = 1 \text{ Bohrsches Magneton})$$

die Zahl $461,5 \cdot 10^{-23}$ eingesetzt, und wir erhalten W mit Zahlenwerten, die um eine Größenordnung höher liegen als bei den beiden anderen Verfahren. Die Zahlenwerte sind innerhalb des Bereiches $0,1 < \eta < 0,95$ annähernd konstant. W beträgt etwa 39800 (Tabelle 6).

Tabelle 6
Berechnung von W bei konstantem p und J_∞

$$\frac{J}{J_\infty} = \eta = \Im \eta x; \quad W = \Re \Im \eta \cdot \frac{k}{p} \cdot \frac{T}{\sigma \cdot q},$$

$$\sigma_\infty = 55,8,$$

$$q = 8,85$$

$$p = 9,23 \cdot 10^{-21} \cdot 0,5$$

$$k = 1,371 \cdot 10^{-16}$$

η	$\Re \Im \eta$	σ	$T^\circ \text{K}$	$\Re \Im \eta \frac{T}{\sigma}$	W	$\Theta = \Re \Im \eta \cdot \frac{T}{\eta}$
0,0	0,0	0				
0,10	0,1003	5,58	654,47	11,77	39500	657
0,2	0,2027	11,16	638,51	11,60	39000	646
0,3	0,3095	16,74	627,99	11,60	39000	648
0,4	0,4236	22,32	615,42	11,66	39200	652
0,5	0,5491	27,90	589,12	11,58	38900	647
0,6	0,6931	33,48	573,36	11,87	39900	660
0,7	0,8673	39,06	538,40	11,95	40100	667
0,75	0,9730	41,85	515,37	11,98	40200	666
0,8	1,0986	44,84	488,29	12,03	40400	663
0,85	1,2561	47,43	453,12	12,00	40300	670
0,90	1,4722	50,22	406,1	11,90	40000	664
0,95	1,8318	53,01	342,3	11,83	39700	660
0,98	2,2976	54,64	295,1	12,42	41700	692
1,0		55,80	—	—	—	—

Erscheint überflüssig zu beweisen, daß die Berechnung von W auf dem Wege über Gl. (23), sowie mit Hilfe von J_∞ und p für den Sonderfall $H = 0$ die spontane Magnetisierung als Funktion der Temperatur in Übereinstimmung mit dem Versuch ergibt. Die Abweichung gegenüber den auf Grund der Beobachtung extrapolierten Werten der spontanen Magnetisierung ist gering. Dies ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß bis zu einer relativen Curietemperatur von 90% die spontane Magnetisierung nur etwa um 3% oder noch geringere Beträge kleiner ist als die bei 20000 Oe gemessene Magnetisierung.

V. Eine umgeformte Zustandsgleichung mit konstantem Weißschen Feld und veränderlichem p

Da die Berechnung der Konstanten der Zustandsgleichung aus der Feldstärkenabhängigkeit von J oder T mit dem experimentellen Befund nicht in Ein-

klang zu bringen ist, wurde versucht, die Zustandsgleichung so umzuformen, daß der zu J hinzutretende Faktor konstant bleibt und der Faktor von H mit der Temperatur variiert wird. Wir schreiben also versuchsweise:

$$\frac{J}{J_{\infty}} = L(\alpha) = L\left(\frac{p_r \cdot H + q W J}{k T}\right) \quad (24)$$

q gilt als unabhängig von T ; p_r ist eine reine Temperaturfunktion. Wir erhalten das Differential

$$\frac{dJ}{J_{\infty}} = L'(\alpha) \cdot \left(\frac{p_r dH}{k T} + \frac{H dp_r}{k T} - \frac{p_r H dT}{k T^2} + \frac{q W dJ}{k T} - \frac{q W J dT}{k T^2} \right).$$

Auch für diese etwas veränderte Zustandsgleichung gilt die oben abgeleitete Gl. (7), die wir jetzt schreiben

$$k \Theta = q W J_{\infty}. \quad (25)$$

Das Differential kann daher auch geschrieben werden:

$$\frac{dJ}{J_{\infty}} = L'(\alpha) \left(\frac{p_r dH}{k T} + \frac{H dp_r}{k T} - \frac{p_r H dT}{k T^2} + \frac{\Theta}{J_{\infty}} \cdot \frac{dJ}{T} - \frac{\Theta J dT}{J_{\infty} T^2} \right),$$

oder

$$\frac{dJ}{J_{\infty}} \left[1 - L'(\alpha) \frac{\Theta}{T} \right] = L'(\alpha) \left(\frac{p_r dH}{k T} + \frac{H dp_r}{k T} - \frac{p_r H dT}{k T^2} - \frac{\Theta J dT}{J_{\infty} T^2} \right). \quad (26)$$

Es werde nun der Fall $T' = \text{const}$ in (26) betrachtet; da bei konstantem T' auch p konstant ist, erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T, p} = \frac{L'(\alpha)}{1 - \frac{\Theta}{T} \cdot L'(\alpha)} \cdot \frac{p_r J_{\infty}}{k T}$$

und nach p aufgelöst

$$p = \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T \cdot \frac{[T - \Theta \cdot L'(\alpha)] \cdot k}{J_{\infty} \cdot L'(\alpha)}. \quad (27)$$

Unter Benutzung von Gl. (12):

$$L'(\alpha) = \frac{d \mathfrak{I} g \alpha}{d \alpha} = \frac{1}{\mathfrak{C} v^2 \alpha}$$

wird dann

$$p = \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T \cdot \frac{k (T \mathfrak{C} v^2 \alpha - \Theta)}{J_{\infty}}$$

Hieraus folgt in ähnlicher Weise wie oben [Gl. (13—17)]

$$p = \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T \cdot \frac{k}{J_{\infty}} \cdot \left(\frac{T}{1 - \eta^2} - \Theta \right). \quad (28)$$

Die Werte $(\partial J / \partial H)_T$, J und T sind unmittelbar aus dem Experiment bekannt; J_{∞} , desgleichen Θ kann aus § 2 entnommen werden; denn in dem vorliegenden Fall findet man

$$\left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_H = - \frac{J}{T} \left[1 + \frac{p H}{q W J} \left(1 + \frac{d \log p}{d \log T} \right) \right] A.$$

Tabelle
Berechnung von p und j
 $p = j \cdot \mu_B$

T °K	$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T$	σ	η	$1 - \eta^2$	$\frac{T}{1 - \eta^2}$
293	$20,0 \cdot 10^{-6}$	54,64	0,947	0,100	2930
377	$21,3 \cdot 10^{-6}$	51,63	0,897	0,195	1930
468,10	$22,7 \cdot 10^{-6}$	46,20	0,800	0,36	1300
550,50	$52,0 \cdot 10^{-6}$	37,19	0,645	0,585	942
581,80	$73,3 \cdot 10^{-6}$	31,54	0,597	0,700	831
616,14	$183 \cdot 10^{-6}$	21,36	0,370	0,863	715
642,07	$475 \cdot 10^{-6}$	7,60	0,132	0,983	654
649,47	$386,6 \cdot 10^{-6}$	5,222	0,0906	0,992	655
660,50	$260,7 \cdot 10^{-6}$	3,286	0,057	0,997	662

ein Ergebnis, das wegen $H \ll WJ$ sich praktisch kaum von Formel (18) unterscheidet; also ist auch η bekannt. Die Berechnung von p auf diesem Wege führt, wie Tabelle 7 zeigt, zu verhältnismäßig großen Werten von p , die mit steigender Temperatur fallen. Der besseren Übersicht halber ist aus den p -Werten noch die der Beziehung $p = j \cdot \mu_B$ entsprechende Quantenzahl berechnet. Wir finden also Quantenzahlen, die von etwa 12 bis auf etwa 1 dicht unter den Curiepunkt abfallen.

Das Ergebnis ist nicht weiter erstaunlich. Da $p \cdot H$ in der Funktion $\mathfrak{I}g\left(\frac{p \cdot H + q WJ}{kT}\right)$ von kleinerer Größenordnung ist als $q WJ$, muß der Faktor p in ziemlich weiten Grenzen geändert werden, um ein Anschmiegen der aus der Formel berechneten Werte an die beobachteten Werte zu erreichen. Die Größe der errechneten inneren Quantenzahlen zeigt, daß der rechnerischen Anpassung keine physikalische Bedeutung zukommt.

VI. Eine umgeformte Zustandsgleichung mit konstantem p und veränderlichem Weisschen Faktor

Wir versuchen nun die Anpassung des Gesetzes an den experimentellen Befund noch auf einem zweiten Weg. Wir nehmen p als konstant an und betrachten jetzt W als abhängig von T und J .

$$\frac{J}{J_\infty} = \mathfrak{I}g\left[\frac{p(H + W_{J,T} \cdot J)}{kT}\right]. \quad (29)$$

Wir bilden wieder das Differential:

$$\frac{dJ}{J_\infty} = \frac{L' p}{k} \left(\frac{dH}{T} + \frac{W dJ}{T} + \frac{\partial W}{\partial J} \cdot \frac{J dJ}{T} - \frac{W J dT}{T^2} + \frac{\partial W}{\partial T} \cdot \frac{J dT}{T} \right).$$

Unter Benutzung von $L' = \frac{d \mathfrak{I}g x}{dx} = 1 - \eta^2$ ergibt sich bei konstantem T :

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T = \frac{J_\infty L' p}{kT} \cdot \frac{1}{1 - \frac{L' p W J_\infty}{kT} \left(1 + \frac{\partial W}{\partial J} \cdot \frac{J}{W}\right)}$$

7
aus einer abgeänderten Zustandsgleichung

$$= \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T \cdot \frac{k}{J_\infty} \left(\frac{T}{1-\eta^2} - \Theta \right).$$

$\frac{T}{1-\eta^2} - \Theta$	$k \left(\frac{T}{1-\eta^2} - \Theta \right)$	$\frac{k}{\sigma} \left(\frac{T}{1-\eta^2} - \Theta \right)$	p	j
2284	$3140 \cdot 10^{-16}$	$57,4 \cdot 10^{-16}$	$1141 \cdot 10^{-22}$	12,35
1284	$1760 \cdot 10^{-16}$	$30,5 \cdot 10^{-16}$	$651 \cdot 10^{-22}$	7,06
654	$896 \cdot 10^{-16}$	$15,53 \cdot 10^{-16}$	$353 \cdot 10^{-22}$	3,82
296	$405 \cdot 10^{-16}$	$7,03 \cdot 10^{-16}$	$366 \cdot 10^{-22}$	3,97
185	$245 \cdot 10^{-16}$	$4,40 \cdot 10^{-16}$	$323 \cdot 10^{-22}$	3,50
69	$94,6 \cdot 10^{-16}$	$1,64 \cdot 10^{-16}$	$300 \cdot 10^{-22}$	3,25
8	$11,0 \cdot 10^{-16}$	$0,191 \cdot 10^{-16}$	$91 \cdot 10^{-22}$	0,98
9	$12,32 \cdot 10^{-16}$	$0,214 \cdot 10^{-16}$	$82,6 \cdot 10^{-22}$	0,90
16	$21,92 \cdot 10^{-16}$	$0,381 \cdot 10^{-16}$	$99,4 \cdot 10^{-22}$	1,08

oder

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{W} \frac{1-\eta^2}{\frac{kT}{pWJ_\infty} - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)}$$

also

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{W} \frac{1-\eta^2}{\frac{\eta}{\text{gr } \Sigma_0 \eta} - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)} \quad (30)$$

Setzt man statt T das Feld H konstant, so folgt:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_H = \frac{J_\infty L' p}{k} \cdot \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial T} \cdot \frac{J}{T} - \frac{WJ}{T^2} \right)}{1 - \frac{J_\infty L' p}{k} \left(\frac{W}{T} + \frac{\partial W}{\partial J} \cdot \frac{J}{T} \right)}.$$

Hieraus ergibt sich

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_H \cdot \frac{T}{J} = L' \cdot \frac{1 - \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}}{\frac{kT}{J_\infty p W} - L' \cdot \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)}$$

oder

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_H \cdot \frac{T}{J} = \frac{(1-\eta^2) \left(1 - \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)}{\frac{\eta}{\text{gr } \Sigma_0 \eta} - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)} \quad (31)$$

Wir führen jetzt die Abkürzungen

$$A = \frac{1-\eta^2}{\frac{\eta}{\text{gr } \Sigma_0 \eta} - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J} \right)},$$

es ist dabei zu beachten, daß diese Bedeutung von A nicht identisch ist mit der früher gebrauchten [vgl. Gl. (10)] — Gl. (19), welche wir jetzt als A_0 bezeichnen wollen, also

$$A_0 = \frac{1-\eta^2}{\frac{\eta}{\text{gr } \Sigma_0 \eta} - (1-\eta^2)};$$

gleichzeitig führen wir die Bezeichnungen $m = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln \eta}$ und $n = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$ ein.

Gl. (30) wird dann wie folgt geschrieben:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T = \frac{A}{W}.$$

Gl. (31) lautet mit den Abkürzungen:

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{J} = A(1-n).$$

Da die experimentell gefundenen Werte von $(\partial J/\partial T)_H T/J$ als Funktion von η dargestellt sich gut mit den theoretisch berechneten Werten von $A_0 = F(\eta)$ decken, so gilt folgende Näherungsgleichung:

$$\approx A \left(1 - \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}\right) = A(1-n) - \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_H \cdot \frac{T}{J} \approx A_0$$

oder

$$\frac{1}{\Re \Im \eta - (1-\eta^2)} \approx \frac{1 - \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}}{\Re \Im \eta - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln \eta}\right)} \quad (32)$$

Dies bedeutet einen gewissen Zusammenhang zwischen m und n ; ist also n bekannt (es wird im folgenden bestimmt), so läßt sich nach dieser Beziehung m ermitteln.

Wir betrachten nun in der H - T -Ebene eine durch den Koordinatennullpunkt verlaufende Gerade. Für diese gilt $T = \gamma \cdot H$ und $dT = \gamma \cdot dH$. Durch Differentiation der Gl. (29) längs einer Geraden $T = \gamma H$ erhält man dann

$$dJ \left(1 - \frac{L' p J}{k}\right) \left(\frac{W}{T} + \frac{\partial W}{\partial J} \cdot \frac{J}{T}\right) = \frac{J}{k} \left(\frac{dH}{T} - \frac{WJ}{T^2} \gamma \cdot dH + \frac{\partial W}{\partial T} \cdot \frac{J}{T} \gamma \cdot dH\right)$$

oder mit $L' = 1 - \eta^2$ und $H \ll WJ$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_{T=\gamma H} = \frac{1}{W} \cdot \frac{(1-\eta^2) \left[1 - \gamma \frac{WJ}{T} (1-n)\right]}{\Re \Im \eta - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln J}\right)} \quad (33)$$

Für fest gewähltes γ kann dann $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_{T=\gamma H}$ als eine Funktion von H oder von η aufgefaßt werden; die letztere Auffassungsart ist die für die folgende Überlegung zweckmäßigere.

Dividiert man nun zu gleichem Wert von η gehörige Werte der Ausdrücke (33) und (30), so findet man

$$\frac{1}{\gamma} \left[\frac{\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_{T=\gamma H} - 1}{\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T} - 1 \right] = \Re \Im \eta \cdot \frac{k}{p} (n-1). \quad (34)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist frei von γ . Das Korrekturglied $n = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$, das der Temperaturveränderlichkeit des Weißschen Feldes Rechnung trägt, ist unabhängig von der Neigung der Geraden $T = \gamma \cdot H$; d. h. es ist

$$\frac{\partial n}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \ln W}{\partial \ln T \cdot \partial \gamma} = 0.$$

Berechnet man nun n aus Gl. (34) zu

$$n = 1 + \frac{p}{k} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\Re \Im \eta} \left[\frac{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \gamma \cdot n}{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T} - 1 \right],$$

so ergibt sich aus

$$\frac{\partial n}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{p}{k} \cdot \frac{1}{\Re \Im \eta} \left[\frac{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \gamma \cdot n}{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T} - 1 \right] + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{p}{k} \cdot \frac{1}{\Re \Im \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \gamma \cdot n}{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T} \right] = 0,$$

dann

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T = \gamma \cdot n}{\partial \gamma} - \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot n} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T.$$

$\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T$ ist dabei natürlich unabhängig von γ . Diese Differentialgleichung in γ als unabhängiger Veränderlicher besitzt folgende Lösung:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H} = \left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T + \gamma \cdot \varphi(\eta \cdot T). \quad (35)$$

Diese Gleichung ist in γ linear. Es ist nun aus dem vorliegenden Versuchsmaterial zu zeigen, daß dies wirklich der Fall ist. Wir berechnen also einige Werte von $\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H}$.

Zu diesem Zweck werden zunächst im T, H -Diagramm je zwei Wertepaare von T und H für gleiches J interpoliert und hieraus die Gleichungen der Linien $J = \text{const}$ berechnet. Bei Feldern über 8000 Oe und Temperaturen unter 320° sind diese Linien Geraden. Es werden dann nach bekannten analytischen Verfahren die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Linien $T = \gamma \cdot H$ bestimmt und hieraus die Differenzen in J und H und daraus $\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H}$ errechnet.

Diese Werte $\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H}$ sind in Abb. 4 für verschiedene J - bzw. σ -Werte über γ aufgetragen. Wie man leicht sieht, ist die behauptete Linearität tatsächlich vorhanden; außerdem ist $\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T$ um etwa zwei Größenordnungen kleiner als die mit $\gamma = 0,035$ und $\gamma = 0,06$ berechneten Werte von $\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H}$.

Aus (34) findet man mit Hilfe von (35):

$$\frac{\partial \ln W}{\partial \ln T} = 1 + \frac{p}{k} \cdot \frac{\varphi(\eta, T)}{\left(\frac{\partial J}{\partial H} \right)_T \cdot \Re \Im \eta} \quad (36)$$

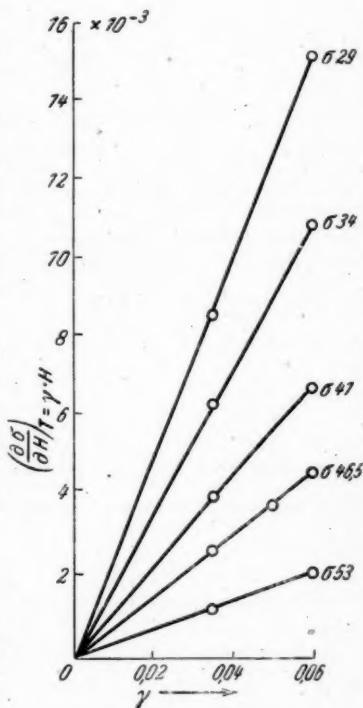


Abb. 4. Nachweis für die lineare Abhängigkeit des $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial H} \right)_{T = \gamma \cdot H}$ von γ

$\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T$ ist dabei aus dem Versuch zu entnehmen. Hat man nun $n = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$ bestimmt, so kann aus Gl. (32) weiter auch noch $m = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln \eta}$ gefunden werden:

$$\left. \begin{aligned} m &= \left\{ \frac{\eta}{\Re \Im \eta} - (1-n) \left[\frac{\eta}{\Re \Im \eta} - (1-\eta^2) \right] \right\} \cdot \frac{1}{1-\eta^2} - 1 \\ &= n \cdot \left(\frac{\eta}{(1-\eta^2) \cdot \Re \Im \eta} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Hieraus folgt wieder:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln W}{\partial \eta} &= n \left(\frac{1}{(1-\eta^2) \cdot \Re \Im \eta} - \frac{1}{\eta} \right) \\ &= \left(1 + \frac{p}{k} \frac{\varphi(\eta, T)}{\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T \cdot \Re \Im \eta} \right) \left(\frac{1}{(1-\eta^2) \cdot \Re \Im \eta} - \frac{1}{\eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die beiden Ableitungen $\frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$ und $\frac{\partial \ln W}{\partial \eta}$ Gl. (36) und (38) wurden aus den Ableitungen $\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_{T=\gamma \cdot H}$ abgeleitet (Tabelle 8). Wenn wir nun W aus Gl. (30) berechnen und für gegebene η und T die entsprechenden Ableitungen von W bilden, so gibt deren Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung mit den durch Gl. (36) und (37) gegebenen Ableitungen einen Prüfstein für die Gültigkeit der in (29) angesetzten Art der Abhängigkeit der Funktion J von T und H .

Wir errechnen aus (30)

$$W = \ln \frac{1}{\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)_T} \cdot \frac{1-\eta^2}{\Re \Im \eta - (1-\eta^2) \left(1 + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln \eta}\right)} \quad (39)$$

Tabelle 8
Berechnung des von T und J abhängig gedachten Weißschen Feldes W und seiner Ableitungen

σ	η	W aus Gl. (30)	$n = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$ aus Gl. (36)	$m = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln \eta}$ aus Gl. (37)	$\frac{\partial \ln W}{\partial \eta}$ aus Gl. (39)
29	0,520	31 900	0,8316	0,1968	0,3789
34	0,586	34 320	0,8435	0,2731	0,4667
41	0,7355	37 190	0,8804	0,1623	0,8334
46,5	0,834	50 340	0,9087	1,1639	1,395
54	0,950	40 540	0,9691	4,1850	4,545

Die so gefundenen Werte von W (Tabelle 8) werden über η aufgetragen und die Differenzquotienten gebildet, wobei T bei festem H als Funktion von η angesehen wird. Dann gilt längs einer solchen Kurve $T(\eta)$:

$$\frac{d \ln W}{d \eta} = \frac{\partial \ln W}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T} \cdot \frac{d \ln T}{d \eta} \quad (40)$$

$\frac{\partial \ln W}{\partial \ln T}$ ist aus (34) bzw. (36) bekannt; $\frac{d \ln T}{d \eta}$ ist aus dem Versuchsmaterial zu entnehmen. Es hat nun die Gegenüberstellung zu erfolgen, von dem aus Gl. (40) graphisch ermittelten $\frac{d \ln W}{d \eta}$ und dem aus Gl. (40) mit Hilfe von (36) und (37) ermittelten $\frac{d \ln W}{d \eta}$. Durch graphisches Differenzieren finden wir in einem weiten Bereich der η -Werte nahezu konstant $\frac{d \ln W}{d \eta} = 0,75$. Für $\eta = 0,7355$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln W}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln W}{\partial \ln T} \cdot \frac{d \ln T}{d \eta} &= 0,833 + 0,8704 (-0,87), \\
 &= 0,833 - 0,756, \\
 &= 0,067.
 \end{aligned}$$

Wenn auch hier die Bildung einer Differenz zweier Zahlen gleicher Größenordnung erfolgt, so ist doch sicher, daß der erhaltene Wert erheblich unter 0,75 liegt.

Die Annahme eines veränderlichen Weißschen Feldes im Sinne der Gl. (29) und (32) läßt sich daher mit den vorliegenden Messungen von Weiß und Forrer nicht in Einklang bringen. Auch durch Annahme eines höheren Wertes für p mit der Quantenzahl 1,0 wird keine bessere Übereinstimmung erzielt.

Düsseldorf, August-Thyssen-Str. 2,
 Essen-Bredeney, Bredeney Str. 25.

(Eingegangen am 16. August 1943.)

Über einen neuen Nachweis von spontaner Magnetisierung oberhalb der Curietemperatur

Von Friedrich Fraunberger

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Durch Beobachtung der Hochfrequenzpermeabilität an Nickel konnte festgestellt werden, daß dieselbe und damit auch die spontane Magnetisierung erst 50 bis 100 Grad oberhalb der Curietemperatur endgültig verschwindet, in voller Übereinstimmung mit allen Aussagen, die man bereits indirekt, besonders aus dem Verlauf der Anomalien, über das ferro-paramagnetische Übergangsgebiet machen konnte.

1. Einleitung

Über das Problem der Curietemperatur (CT) hat W. Gerlach einen erschöpfenden Bericht gegeben¹⁾ und darin vorgeschlagen, sie als die Temperatur zu bezeichnen, „bei der die physikalischen Eigenschaften, welche durch die spontane Magnetisierung der Ferromagnetika beeinflusst werden, das Maximum der Anomalie haben.“ Die spontane Magnetisierung (sp. M.) selbst aber wird dort nicht Null, wie es die Weißsche Theorie erfordert, sondern ihr Verschwinden verschleppt sich, wie namentlich aus dem Gang der Anomalien zu folgern ist, über einen Temperaturbereich, der bei Nickel 50°, möglicherweise sogar 100° umfaßt. Indessen ist es mit den üblichen Magnetisierungsmessungen nicht möglich, einen direkten Beweis hierfür zu erbringen, da sie in dem in Frage stehenden Temperaturgebiet die Anwendung starker und stärkster Felder erfordern. Diese erzeugen aber, und zwar im Übergangsgebiet leichter als unterhalb CT, wahre Magnetisierung (w. M.), welche die gesuchte spontane, also ohne äußeres Feld vorhandene Magnetisierung verdeckt. Eine Trennung beider Arten war wohl in einigen Fällen möglich, aber nur bis etwa 20° oberhalb CT. „Die Beobachtung der reinen sp. M. müßte grundsätzlich im Felde Null erfolgen.“

2. Das Ziel

vorliegender Arbeit war, das Verhalten der Hochfrequenzpermeabilität (H.P.) im Curiegebiet zu untersuchen. Die H.P. kommt nach heutigen Vorstellungen in erster Linie durch reversible Wandverschiebungen, bei Frequenzen über 10⁷ Hz ausschließlich durch solche zustande²⁾. Da in $\mu = 1 + 4\pi\chi$ die Suszeptibilität χ nach R. Becker³⁾ prop. zu $I_s^2 \cdot O_{90}^{180}$ (I_s = spont. Magn., O_{90}^{180} = die Oberfläche

¹⁾ W. Gerlach, Z. Elektrochem. 45, 151 (1939). Mit vollständigem Literaturnachweis.

²⁾ R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, Berlin 1939, S. 228, 236.

³⁾ Siehe ²⁾, S. 150.

der im cm^3 enthaltenen 90° - bzw. 180° -Wände) ist aus vorhandener H.P. rein qualitativ auch auf das Vorhandensein von sp. M. zu schließen.

Das Entscheidende dabei ist, daß der Nachweis von H.P. mit verschwindend geringer Feldstärke erfolgen kann, so daß die Erzeugung von w. M. nicht zu befürchten ist.

3. Meßmethode

Ein Sender wirkte bei sehr loser Kopplung auf einen einfachen Meßkreis ein, der aus einer Kopplungsschleife, einem Präzisionsdrehkondensator und der eigentlichen Meßspule bestand (20 Windungen 1 mm dicken Kupferdrahtes waren auf ein Supremaxglasröhrchen von 8 mm Durchmesser gewickelt, 5 Windungen pro Zentimeter). In deren Inneres wurde das Nickel, das in Drahtform vorlag, gegeben. Die Meßspule befand sich im Ofen, in Wasserstoffatmosphäre. Als Stromanzeiger diente ein Thermokreuz in Vakuum, gelegentlich wurde auch die Spannung an der Meßspule gemessen.

Aufgenommen wurden die Resonanzkurven bei den verschiedenen Temperaturen. Sie wurden graphisch ausgewertet, die Orte der Maxima konnten auf $\frac{1}{2}$ Sktl. genau bei etwa 30 Sktl. größter Verschiebung ermittelt werden. Die Bedienung des Drehkondensators erfolgte durch Schnurantrieb aus 2 m Entfernung, die Ablesungen geschahen mittels Fernrohr. Da die Aufnahme einer Kurve einige Zeit in Anspruch nahm, war nicht immer die Temperaturkonstanz für diese Dauer gewährleistet, so daß mit einer Unsicherheit in den Temperaturangaben von $\pm 2^\circ$ zu rechnen ist. Deswegen möchten wir der Kurve, die die Verstimmung wiedergibt (Abb. 1), nur prinzipiellen Charakter zuweisen, verlässlicher sind die Kurven, welche die Resonanzhöhen darstellen. Die Ströme im Meßkreis wurden so gering wie möglich gehalten, damit einerseits der eingangs erhobenen Forderung nach verschwindend geringer Feldstärke entsprochen wurde, und damit andererseits zusätzliche Erwärmung des Nickels durch Wirbelströme nicht ins Gewicht fiel. 0,05 Oerstedt wurden nicht überschritten.

Die Messungen wurden wiederholt mit einem quarzstabilisierten Sender, auch der Meßkreis wurde aus lauter neuen Teilen gebaut, da die erstmals beobachteten Diskontinuitäten im Kurvenbild Verdacht auf apparative Eigenheiten erregten. Die ersten Befunde bestätigten sich, im übrigen wurde die Meßgenauigkeit erhöht.

Schließlich wurde versucht, den Nickeldraht direkt in den Meßkreis zu schalten, also den Skineffekt heranzuziehen. Diese Methode ist die empfindlichste, auch eröffnet sie die Aussicht, Absolutwerte von μ zu erhalten. Während bisher immer

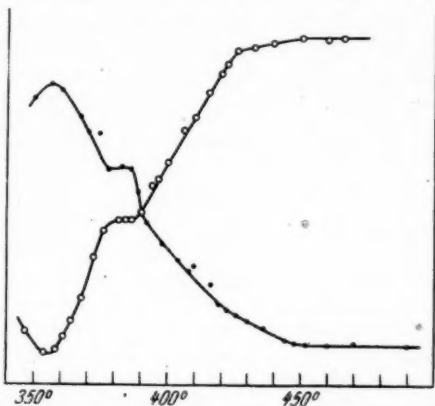


Abb. 1. Die eine Kurve (....) zeigt die Verstimmung des Meßkreises in ΔC , die andere (o o o) die jeweiligen Höhen der Resonanzkurven in Abhängigkeit von der Temperatur.

Frequenz: $2,04 \cdot 10^7$ Hz. Carboneynickel

die Maxima der Resonanzkurven nach Lage und Höhe erfaßt wurden, empfiehlt sich für Fälle, wo es auf die Festlegung von Details, etwa auf die genaue Lage von Knickstellen oder den Einsatz der Permeabilität vom paramagnetischen Teil her, ankommt, folgendes Verfahren: Man verlegt den Arbeitspunkt in eine der Flanken der Resonanzkurve und läßt dann den Drehkondensator unverändert. Man rückt also nicht mehr den Resonanzkurven nach, wie bisher, sondern beobachtet deren Vorbeigleiten bei veränderlicher Temperatur. Im steilen Teil gehören zu geringen Permeabilitätsänderungen bedeutend größere Änderungen der Ausschläge als im anderen Fall, und wir stützen einige Aussagen auf diese Methode, auch wenn sie aus den angeführten Abbildungen nicht so deutlich hervorgehen.

4. Ergebnisse

Wir müssen uns in dieser ersten Mitteilung auf die Wiedergabe folgender Meßgrößen beschränken: Abb. 1, gewonnen an Carboñynickel, das wir Heraeus-Hanau verdanken, stellt die AC -Werte⁴⁾ dar, um welche der Meßkreis infolge der mit der Temperatur veränderten Selbstinduktion der Meßspule verstimmt

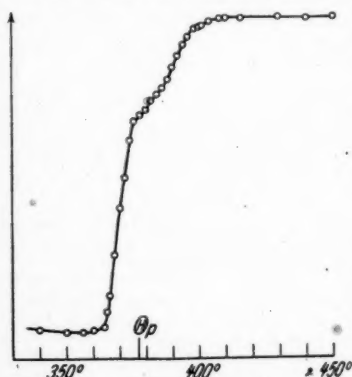


Abb. 2. Höhen der Resonanzkurven als Ausdruck der Dämpfung durch Skineffekt.

Frequenz: $3,00 \cdot 10^7$ Hz. Reinnickel

um die Vorbereitung einer Umwandlung, die dann bei 376° beendet wäre; hierauf strebt die Permeabilität mit noch größerer Steilheit dem Maximum zu, das in den Curiepunkt (354°) fällt.

Abb. 2 gibt ebenfalls Resonanzhöhen wieder. Hier war „Reinnickel“, das seit mindestens 25 Jahren im Institut vorhanden war, direkt in den Meßkreis geschaltet. Bei dieser Messung wurde der Quarzsender verwendet, die Frequenz betrug $3,00 \cdot 10^7$ Hz ($\lambda = 10,0$ m). Der kräftige Anstieg bzw. die Permeabilität setzte hier erst bei 408° ein, bei 382° war sie schon so groß wie bei Zimmertemperatur! Sehr ausgeprägt ist wieder die Richtungsänderung bei 376° , das Maximum der Dämpfung lag bei 356° .

⁴⁾ Aufgetragen sind die Beträge, die Differenzen sind an sich negativ.

⁵⁾ Zwar hätte man nur weniger Nickel zu nehmen brauchen, aber dann wären die Verschiebungen wieder zu gering geworden.

Daß es sich tatsächlich bei obigen Versuchen (Abb. 1) um magnetische Ursachen der Dämpfung und Verstimmung handelt, ließ sich dadurch zeigen, daß letztere nur bei ferromagnetischen Stoffen auftraten. Kupfer derselben Menge wie Nickel z. B. erniedrigte die Resonanzkurve im Vergleich zu der bei leerer Meßspule um 2 Sktl. gegenüber bis 240 bei Nickel. Ein Temperaturgang über 200° bei Kupfer war kaum zu bemerken. Daraus ist auch zu schließen, daß Effekte, die auf der Veränderung des Ohmschen Widerstandes des Nickels mit der Temperatur beruhen, ganz in den Hintergrund treten.

5. Diskussion

Die Ergebnisse bestätigen alles, was man bisher über das ferro-paramagnetische Übergangsgebiet besonders aus dem Verlauf der Anomalien geschlossen hat¹⁾. Danach müßte spontane Magnetisierung auftreten bzw. endgültig verschwinden bei 405° nach dem Gang der spez. Wärme, zwischen 400° und 450° nach der Widerstandsanomalie, bei 410° nach der Thermokraft, bei 420° nach dem magnetokalorischen Effekt. Magnetostriktion wurde nachgewiesen bis 395°. Das rein paramagnetische Verhalten von Nickel beginnt bei 412° (nach W. Sucesmith) bzw. 450° (nach P. Weiß und R. Forrer).

Nach unseren Befunden sind zu nennen die Temperaturen 408° bei „Reinickel“ und 456° bei Carbylnickel²⁾. Es ist durchaus denkbar, daß schon geringe Beimengungen von Fremdatomen die ersten Versuche zur Schwarmbildung sehr erschweren, so daß die Diskrepanz beider Werte nicht überrascht. Der Knick bei 396° bei Reinnickel, dem vielleicht ein solcher bei 425° bei Carbylnickel entspricht, ist noch nicht deutbar. Bemerkenswert ist der starke Richtungswechsel bei 378°. Diese Temperatur fällt zusammen mit dem sog. paramagnetischen Curiepunkt, der im Curie-Weißschen Gesetz über den Paramagnetismus der Ferromagnetika eine Rolle spielt und auch anderweitig als eine Art Grenztemperatur schon aufgetreten ist.

Rückblickend kann somit festgestellt werden, daß das gesteckte Ziel voll auf erreicht wurde. Daß dies durch Anwendung der Hochfrequenz möglich war, hat aber nicht nur seinen Grund darin, daß man, wie eingangs erörtert, verschwindend kleine Feldstärken hat, sondern es kommt im kritischen Gebiet der Lebensdauer der Elementarbezirke eine entscheidende Bedeutung zu. Hält man sich an das Bild der Schwärme, die als Vorstufe der permanenten Weißschen Bezirke anzusehen sind, so ist es notwendig, ihnen eine beschränkte, von der Temperatur abhängige Lebensdauer zuzuschreiben. Mit dem fortgesetzten Zerfall und der wiederkehrenden Neubildung der Schwärme ist auch eine solche der Wände verbunden, die als Übergangszonen benachbarter Bezirke aufzufassen sind. Dann ist es klar, daß ein technischer Magnetisierungsvorgang, in obigem Fall also eine Wandverschiebung, nur dann bemerkbar wird, wenn die Zeit, innerhalb der sie erfolgt, nicht größer ist als die Lebensdauer der Wand selbst. Die Verschiebungsdauer ist aber von der Größenordnung der Periode des magnetisierenden Wechselfeldes. So versteht man auch, warum mit statischen Methoden ferromagnetische Permeabilität im Übergangsgebiet nur mehr beschränkt nachweisbar ist. G. Scharff²⁾, welche die Anfangspermeabilität von Nickel gemessen hat, fand am

¹⁾ Diese Temperaturen wären somit die wahren Curiepunkte im Weißschen Sinne.

²⁾ G. Scharff, Z. Physik 97, 93.

C.P. einen steilen Abfall, nach 3° oberhalb C.T. scheint aller Ferromagnetismus verschwunden. Wir haben Versuche mit Wechselstrom von 500 Hz angestellt, ein Unterschied gegenüber dem statischen Fall war noch nicht zu bemerken. Hingegen reichte bei $2 \cdot 10^6$ Hz die H.P. schon bis 405° , bei 10^7 Hz bis 408° (bei Reinnickel!), welcher Wert sich dann bis $3 \cdot 10^7$ Hz nicht mehr änderte. So bekommt man immerhin einen rohen Anhaltspunkt über die mittlere Lebensdauer der Schwärme.

Diese Arbeit wurde ausgeführt im Physikalischen Institut der Universität Würzburg im Winter 1944/45, mußte aber infolge der Kriegsergebnisse abgebrochen werden. Es ist dem Verfasser ein Bedürfnis, Herrn Prof. Dr. W. Gerlach für briefliche Diskussionen herzlich zu danken.

Rotthalmünster/Niederbayern.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. September 1947.)

**Berichtigung zu der Arbeit von P. Honigmann, K. Molière
und I. N. Stranski „Über den Gültigkeitsbereich
der Thomson-Gibbsschen Gleichung“**

(Annalen der Physik, 6. Folge, Bd. 1, Heft 4/5, S. 181)

Herr Dr. O. Emersleben hat uns in freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht, daß der von ihm berechnete Wert der Madelungschen Konstante für das Steinsalzgitter¹⁾ dort mit

$$1,74756_{82}^{73}$$

angegeben ist, in recht guter Übereinstimmung mit dem von uns²⁾ mitgeteilten Wert. Der von uns zum Vergleich herangezogene Wert stammte aus dem Enzyklopädieartikel von Born³⁾ und war hier in den letzten Dezimalen nicht ganz korrekt wiedergegeben.

B. Honigmann, K. Molière, I. N. Stranski.

¹⁾ Physik. Z. **24**, S. 100 rechts unten (1923).

²⁾ Ann. Physik (6) **1**, 189 (1947).

³⁾ M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, Berlin 1923, S. 733.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikal. Chemie
und Elektrochemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. Oktober 1947.)

Nochmals zur Thermodynamik der Supraleitung

Von M. v. Laue

Inhaltsübersicht

Erwiderung auf die Arbeit von V. Ginsburg „On the surface energy and the behaviour of superconductors of small dimensions“ *Journal of physics* **9**, 305 (1945).

V. Ginsburg behandelt in einer Arbeit, die hier erst jetzt bekannt wird, die Thermodynamik des Phasenübergangs vom Supra- zum Normalleiter, insbesondere für Körper, deren Abmessungen klein gegen die Eindringtiefe des Magnetfeldes in den Supraleiter sind, also ein Thema, welches ich vor 10 Jahren in diesen Annalen bearbeitet habe¹⁾. Er kommt zu Ergebnissen, welche von meinen abweichen, und führt dies auf zwei Unrichtigkeiten zurück, welche in meiner Überlegung stecken sollen²⁾. Die eine sieht er darin, daß ich der Phasengrenze keine Oberflächenenergie zuschreibe, die zweite, daß ich bei der virtuellen Verrückung der Grenzfläche auf die damit verbundene Veränderung des Supraströmfeldes keine Rücksicht nehme.

Ich beginne mit dem zweiten Einwand. In meiner Überlegung bilden der Suprastrom und seine Träger einen Mechanismus, welcher auf die Grenzfläche Kräfte ausübt und somit, wenn diese sich verschiebt, Arbeit leistet, und zwar an dem aus den beiden Phasen bestehenden System. Nach der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung soll die Arbeit bei einer virtuellen Verrückung gleich der Zunahme der freien Energie des Systems sein. Aber die Änderungen, die der Mechanismus selbst dabei erfährt, kommen in dieser Bedingung nicht vor. Deshalb ist es m. E. durchaus konsequent, wenn ich sie an dieser Stelle nicht berücksichtige.

Wenn ich ferner — um auf den ersten Einwand zu kommen — die Oberflächenenergie nicht erwähne, so habe ich dafür den Grund, daß mir weder ein Versuch bekannt ist, aus welchem ihre Existenz hervorgeht, noch theoretische Gründe diese wahrscheinlich machen. Die völlige Übereinstimmung der Raumgitter in beiden Phasen scheint mir dagegen zu sprechen. Sollte sich dies aber als irrig herausstellen, so wäre die Gleichgewichtsbedingung leicht daraufhin abzuändern. Es käme nämlich dann die Größenveränderung des Oberflächenflächenelementes da bei einer Verrückung dn nach der Seite des Supraleiters in Betracht. Bezeichnet man mit R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien

¹⁾ M. v. Laue, *Ann. Physik* **32**, 71 u. 253 (1938). Ein rechnerisches Versehen, das dort den supraleitenden Zylinder im transversalen Magnetfeld betraf, stellte der Verf. richtig in seinem Buch „Theorie der Supraleitung“ Berlin u. Göttingen, 1947.

²⁾ l. c. Anmerkung auf S. 308.

von $d\sigma$, rechnet man sie als positiv, wenn die Krümmungsmittelpunkte im Supraleiter liegen, und benennt man mit f_0 die freie Energie pro Flächeneinheit, so ist

$$-f_0 d\sigma \delta n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

die durch die Verrückung herbeigeführte Änderung der freien Oberflächenenergie, und die Gleichgewichtsbedingung lautete dann³⁾:

$$\frac{1}{2} \lambda I^2 = \frac{f_N - f_S}{V} - f_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Schließlich hält Ginsburg meine Ergebnisse auch für empirisch widerlegt. In der Tat stimmen manche Messungen nicht quantitativ mit ihnen überein. Aber sind diese Messungen schon endgültig? Wie früher (l. c.) darf ich jedenfalls darauf hinweisen, daß sich meine Ergebnisse den Beobachtungen von Pontius⁴⁾ über den magnetischen Grenzwert für dünne Drähte im longitudinalen Felde ganz gut einfügen; ich konnte sogar wegen dieser Übereinstimmung eine Zahlenangabe über die Supraleitungskonstante λ daraus ableiten.

Zum Schluß darf ich wohl einige Bedenken gegen Ginsburgs Überlegung anführen. Sie nimmt erstens — ohne Begründung — keine Rücksicht auf die Form des in Rede stehenden Metallstücks und seine Lage zum äußeren Felde, überträgt vielmehr, was sie für den Zylinder im longitudinalen Feld herausbekommt, ohne weiteres auf ebene, planparallele Schichten. Zweitens legt sie statt einer unendlich kleinen, virtuellen Änderung eine durchaus endliche zugrunde, nämlich den Zusammenbruch der Supraleitung bis zum völligen Verschwinden des Supraleiters, und stellt dabei nicht einmal die Frage, ob ein solcher Vorgang umkehrbar verlaufen kann. Aus diesen Gründen scheint mir das Resultat Ginsburgs anfechtbar.

³⁾ Vgl. hierzu Ann. Physik **32**, 71 u. 253 (1938) und „Theorie der Supraleitung, Gl.(16.4). f_N und f_S sind die freien Energien von Normal- und Supraleiter pro Mol, V ist das gemeinsame Molvolumen.

⁴⁾ R. B. Pontius, Nature **139**, 1065 (1937).

Göttingen, Max-Planck-Institut der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft.

(Bei der Redaktion eingegangen am 29. Dezember 1947.)

Die axialsymmetrische elektromagnetische Strahlung zwischen konfokalen Drehparabolen bei verschiedenen Anregungsarten

Von Herbert Buchholz

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die vorliegende Arbeit bringt die strenge Integration der Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in dem unbegrenzten Raum zwischen zwei vollkommen leitenden konfokalen Drehparabolen, wenn die dabei mitberücksichtigte Anregung des Feldes in diesem Raum durch einen zur Rotationsachse konzentrischen elektrischen oder magnetischen Stromring erfolgt und also das Feld axialsymmetrisch ist. Die Lösung erscheint zunächst in der Gestalt eines komplexen Integrals, dessen Integrand sich aus einem Produkt oder einer Summe von Produkten mit den beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ oder deren Ableitungen zusammensetzt. Die Integrationsvariable ist der vordere Parameter s dieser Funktionen. Die Lösung basiert auf der schon an anderer Stelle¹⁾ vom Verfasser hergeleiteten Integraldarstellung der eben beschriebenen Art für die Greensche Funktion $\exp(ikr)/r$ der Wellengleichung bei beliebiger Lage von Aufpunkt und Quellpunkt.

Die in den Gl. (2.10) und (5.3) angegebene Lösung umfaßt infolge ihrer großen Allgemeinheit eine ganze Reihe Sonderfälle, unter denen einige von großer technischer oder physikalischer Bedeutung sind. Eine erste Gruppe von Sonderfällen wird im Abschnitt 3 behandelt. Sie ist gekennzeichnet durch das Fehlen des inneren Drehparabols. Sie betrifft also die elektromagnetische Strahlung im Innern eines unendlich langen hohlen parabolischen Horns. Nach der Art der Anregung werden unterschieden der freistehende magnetische Stromring, die zonale EMK in der inneren Oberfläche des äußeren Parabols, die man sich durch eine fremde Stromquelle geliefert zu denken hat und die längs eines ringförmigen Schlitzes im aufgeschnittenen Drehparabol wirksam ist; und der in der Achse liegende achsenparallele Dipol in beliebiger Orientierung zum Brennpunkt. Die beiden zuletzt erwähnten Anregungsformen entstehen aus dem freistehenden magnetischen Stromring, wenn er entweder in die äußere Begrenzungsfläche hineinrückt oder auf die Achse zusammenschumpft.

Für die zweite Gruppe der im Abschnitt 4 besprochenen Sonderfälle der allgemeinen Lösung ist charakteristisch, daß hier das äußere Drehparabol fehlt, weil dessen Begrenzungsfläche ins Unendliche hinausgerückt worden ist. Nach der Art der Anregung werden wieder unterschieden der freistehende magnetische Stromring, die zonale EMK in der Oberfläche des ehemals inneren Parabols und der achsenparallele elektrische Dipol auf dem noch zugänglichen Teil der Rota-

¹⁾ H. Buchholz, Integral- und Reihendarstellungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik in den Koordinaten eines Rotationsparaboloids, Z. Physik, (1944), im Erscheinen begriffen.

tionsachse. Auch hier stellen die beiden zuletzt erwähnten Formen der Anregung lediglich Grenzfälle des freistehenden Ringes dar, die dadurch verwirklicht werden, daß der Ring entweder in die Oberfläche des Paraboloids oder in die Achse hineinrückt. Schließlich wird in diesem Abschnitt auch noch die Lösung für den Fall angegeben, daß der Außenraum gemäß Abb. 3 durch zwei konfokale, sich orthogonal schneidende Drehparabole begrenzt ist. Für die physikalisch bedeutsamen Anordnungen werden aus den Integraldarstellungen auch die für die numerische Rechnung wichtigeren Reihenentwicklungen hergeleitet. Sie entstehen aus den Integralen durch Anwendung des Residuensatzes und erfordern die Kenntnis der Nullstellen von $M_{s,1}$ und $W_{s,1}$ oder deren Ableitungen in bezug auf s . Die darüber notwendigen Angaben sind an den betreffenden Stellen zu finden.

Der Abschnitt 5 bringt die allgemeine Lösung der eingangs beschriebenen Aufgabe für den elektrischen Stromring.

1. Die Voraussetzungen der Arbeit

In einer erst kürzlich erschienenen Abhandlung²⁾ wird die axialsymmetrische Strahlung im Innern eines hohlen unendlich langen und vollkommen leitenden Drehparaboloids untersucht, wenn dabei der sie erzeugende, axial gerichtete Dipol elektrischer oder magnetischer Art in oder vor dem Brennpunkt selbst in der Achse liegt. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der axialsymmetrischen Strahlung in wesentlich allgemeinerer Form angepackt. Im Hinblick auf die ältere Arbeit werden wir es uns dann ersparen können, die erzielten Ergebnisse überall dort, wo wesentlich gleichartige Bedingungen vorliegen, mit der gleichen Ausführlichkeit wie früher zu besprechen. Andererseits geben die in mehrfacher Hinsicht allgemeineren Voraussetzungen der vorliegenden Arbeit die Möglichkeit, auch solche Fälle zu behandeln, die vordem außer Betracht geblieben sind.

Die größere Allgemeinheit der neuerdings gewählten Aufgabenstellung kommt einmal darin zum Ausdruck, daß der für die Abstrahlung zur Verfügung stehende Raum zunächst von zwei konfokalen und gleichparametrischen Drehparaboloiden begrenzt gedacht wird. Aber auch die Anregung des Feldes soll, obgleich sie immer noch axialsymmetrisch angenommen wird, von allgemeinerer Art sein. Sie mag im vorliegenden von einem zur gemeinsamen Rotationsachse der beiden Drehparabole konzentrischen und zwischen ihnen liegenden magnetischen oder elektrischen Stromring ausgehen. Dem magnetischen Stromring kommt dabei die besondere Bedeutung zu, daß er nach dem Hineinrücken in die Oberfläche eines der beiden Paraboloiden die felderzeugende Wirkung einer eingepprägten zonalen EMK wiedergibt. Läßt man dann das Innere der beiden Drehparabole mehr und mehr an Größe zusammenschrumpfen, so liegt der Fall des einzelnen hohlen Drehparaboloids vor. Reduziert sich dabei gleichzeitig der Durchmesser des Stromrings auf Null, so verhält sich der magnetische Stromring wie ein elektrischer achsenparalleler Dipol, der selbst in der Achse liegt und umgekehrt. Dabei liegt die Wahl seiner Lage auf der Achse völlig in unserer Hand. Rückt andererseits das äußere der beiden Drehparabole mehr und mehr ins Unendliche, so ge-

²⁾ H. Buchholz, Das Feld der elektromagnetischen Strahlung im Innern eines hohlen Drehparaboloids mit einem axial gerichteten elektrischen oder magnetischen Dipol in oder vor dem Brennpunkt, Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung (ZWB), Forschungsbericht Nr. 2009.

langen wir zu dem Fall des frei endigenden unendlich langen Drahtes von der Gestalt eines schlanken Rotationsparaboloids. Sollen hieran wie an einer Antenne die erzwungenen Schwingungen einer in der Oberfläche des Drahtes liegenden zonalen EMK untersucht werden, so läßt sich auch die diesem Fall entsprechende Lösung sofort der allgemeinen Lösung entnehmen, indem man den Stromring in die Oberfläche des Drahtes hineinrücken läßt. Schließlich macht es nur geringe Mühe, die Lösung der Aufgabe auch nach der Richtung hin zu erweitern, daß etwa in dem zuletzt betrachteten Falle der Außenraum auf der einen Seite noch durch ein zur Drahtoberfläche orthogonales und konfokales Drehparabol begrenzt ist. Diese Aufzählung von Sonderfällen mag genügen, um zu erkennen, daß die Lösung der oben formulierten, zunächst recht abstrakt erscheinenden Aufgabe zugleich die Lösung zahlreicher einfacherer Aufgaben in sich schließt, die unmittelbar für Physik und Technik von Bedeutung sind. Es versteht sich im übrigen von selbst, daß für die Herstellung der Lösung das Material der Drehparabole als vollkommen leitend angesehen wird.

2. Die Herstellung der allgemeinen Lösungsgleichung für den magnetischen zwischen zwei Drehparabolen liegenden Stromring

In dem durch die Gl. (2.1a, b, c) definierten rotationsparabolischen Bezugssystem der (ξ, η, φ) stellen sich die oben besprochenen, der Aufgabe zugrunde

$$x = \rho \cos \varphi = 2 \sqrt{\xi \eta} \cos \varphi \quad (2.1a)$$

$$y = \rho \sin \varphi = 2 \sqrt{\xi \eta} \sin \varphi \quad (2.1b)$$

$$z = \xi - \eta \quad (2.1c)$$

liegenden Voraussetzungen gemäß Abb. 1 wie folgt dar: Die innere und äußere Begrenzungsfläche des für die Abstrahlung zur Verfügung stehenden Raumes bilden die beiden Paraboloidflächen $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_a$ mit $\eta_a > \eta_i > 0$. Jeder im Raum zwischen diesen beiden Grenzparaboloiden liegende Aufpunkt hat eine Koordinate η mit $\eta_i < \eta < \eta_a$. Die gleiche Koordinate haben auch alle diejenigen Punkte, die mit dem anfangs herausgegriffenen auf dem gleichen zur Rotationsachse konzentrischen und auf ihr senkrecht stehenden Kreise liegen. Die Gleichung $\xi = \text{const.}$ beschreibt ein System von Drehparabolen, das mit dem der η -Schar den Brennpunkt F gemeinsam hat und jedes Parabol dieser Schar senkrecht durchschneidet. Im Scheitelpunkt jedes der η -Parabole ist $\xi = 0$, in allen anderen Punkten ihrer Oberfläche ist $\xi > 0$, so daß ξ alle positiven reellen

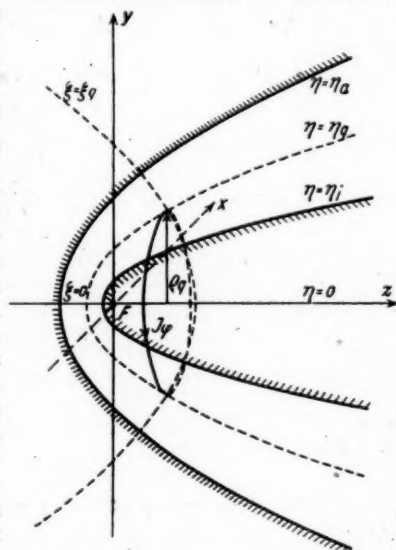


Abb. 1. Die Einlagerung des rechtwinkligen und des parabolischen Bezugssystems in den für die Strahlungsausbreitung zur Verfügung stehenden Raum zwischen den beiden fokalen und gleichparametrischen Drehparabeln $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_e$. Der Stromring ist zugleich der Schnittkreis von den beiden fokalen und orthogonalen Drehparabeln $\eta = \eta_o$ und $\xi = \xi_o$.

Zahlenwerte mit Einschluß der Null annehmen kann. Die Lage des Stromrings, der das die Strahlung erregende Feld hervorruft, sei fixiert durch das Wertepaar (ξ_a, η_a) mit $\eta_i < \eta_a < \eta_o$.

Besteht nun allgemein in einem unbegrenzten, homogenen und isotropen Medium mit den Stoffkonstanten ϵ_0 und μ_0 ein in seiner Verteilung bekanntes, ganz im Endlichen gelegenes System von eingepprägten elektrischen und magnetischen Strömen $\mathfrak{E}^{(e)}$ und $\mathfrak{E}^{(h)}$ und stehen dabei in dem von ihnen erzeugten elektromagnetischen Feld die beiden Feldvektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} in dem durch die Feldgl. (2.2a, b) und durch die Divergenzbedingungen (2.2 α , β) angegebenen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = -i \omega \epsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{(e)} \quad (2.2a)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = +i \omega \mu_0 \mathfrak{H} - \mathfrak{E}^{(h)} \quad (2.2b)$$

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0 \quad (2.2\alpha)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = 0 \text{ für } \mathfrak{E}^{(e, h)} = 0. \text{ Zeitgesetz: } e^{-i\omega t} \quad (2.2\beta)$$

Zusammenhang, so läßt sich auf Grund der Linearität dieser Gleichungen das resultierende elektromagnetische Feld stets in zwei Teilfelder zerlegen, von denen das eine nur von dem gegebenen elektrischen Strom $\mathfrak{E}^{(e)}$, das andere nur von dem gegebenen magnetischen Strom $\mathfrak{E}^{(h)}$ herrührt. In dem zuerst genannten Feldanteil können \mathfrak{E} und \mathfrak{H} mittels der Gl. (2.3a, b) aus einem Hilfsvektor $\mathfrak{D}^{(e)}$

$$-i \omega \epsilon_0 \cdot \mathfrak{E} = k^2 \mathfrak{D}^{(e)} + \text{grad div } \mathfrak{D}^{(e)} \quad (2.3a)$$

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{D}^{(e)}, \quad (2.3b)$$

berechnet werden, der seinerseits durch die Gl. (2.3) bestimmt ist.

$$\mathfrak{D}^{(e)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathfrak{E}^{(e)}(x', y', z') \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot dV' \quad [\mathfrak{E}^{(e)}] = A/\text{cm}^2. \quad (2.3)$$

In dieser Gleichung bedeutet R den Abstand des Aufpunktes (x, y, z) vom Orte (x', y', z') , an dem das elektrische Stromelement liegt. Bei dem zweiten Feldanteil lassen sich \mathfrak{E} und \mathfrak{H} gemäß den Gl. (2.4a, b) aus einem Hilfsvektor $\mathfrak{D}^{(h)}$

$$\mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{D}^{(h)} \quad (2.4a)$$

$$g^{(h)} \mathfrak{H} = k^2 \mathfrak{D}^{(h)} + \text{grad div } \mathfrak{D}^{(h)} \quad (2.4b)$$

ableiten, der mit der gegebenen Verteilung der magnetischen Ströme über die Gl. (2.4) zusammenhängt

$$\mathfrak{D}^{(h)}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathfrak{E}^{(h)}(x', y', z') \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot dV' \quad [\mathfrak{E}^{(h)}] = V/\text{cm}^2. \quad (2.4)$$

In dem zunächst zu behandelnden Falle des magnetischen Stromringses ist nun offenbar im Hinblick auf die lineare Struktur des magnetischen Stromfadens

$$\mathfrak{E}^{(h)}(x', y', z') \cdot dV' = \mathfrak{E}^{(h)} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' = I_\varphi^{(h)} \cdot \varrho_q \cdot dq_q \cdot e_{\varphi_q} \quad [I_\varphi^{(h)}] = V$$

und hierin ist $I_\varphi^{(h)}$ nach Voraussetzung über den ganzen Umfang des Stromrings als konstant anzusehen. Nun hat grundsätzlich der Beitrag eines jeden Stromelements $I_\varphi^{(h)} \cdot \varrho_q \cdot dq_q$ zum Vektor $\mathfrak{D}^{(h)}$ die Richtung dieses Stromelements. Diese

Richtung bildet aber im Aufpunkt A , der nach Abb. 2 die Koordinaten (ϱ, φ) hat, mit der dort geltenden Richtung zunehmender Werte von φ den Winkel $\varphi_0 - \varphi$. Mithin ist der Beitrag sämtlicher Stromelemente zur Vektorkomponente $\mathfrak{D}_\varphi^{(h)}$ von $\mathfrak{D}^{(h)}$ in A durch die Gl. (2.5a) gegeben.

$$\mathfrak{D}_\varphi^{(h)} = -\frac{I_\varphi^{(h)} \cdot \varrho}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \cdot d\varphi_0 \quad (2.5a)$$

Der von dem einzelnen Stromelement in P herrührende Beitrag zum Vektor $\mathfrak{D}^{(h)}$ in A hat aber auch eine Komponente in Richtung zunehmender Werte von ϱ . Für alle Stromelemente zugleich gilt für diese Vektorkomponente im Punkt A der Ausdruck (2.5b)

$$\mathfrak{D}_\varrho^{(h)} = -\frac{I_\varphi^{(h)} \cdot \varrho}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \cdot d\varphi_0 \quad (2.5b)$$

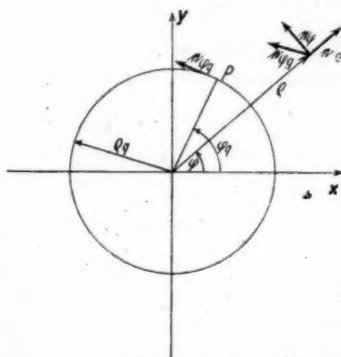


Abb. 2. Der Kreis stellt den Stromring in Richtung der negativen z-Achse dar. Das Bild erläutert die Zusammensetzung der elementaren Beiträge der einzelnen Dipolelemente des Stromrings zu einem resultierenden Vektor in Richtung zunehmender Werte von ϱ und φ im Aufpunkt

Hingegen besitzt \mathfrak{D} sicherlich keine Komponente in einer Richtung, die senkrecht zur Ebene von Abb. 2 steht. Es ist aber leicht einzusehen, daß auch $\mathfrak{D}_\varrho^{(h)} = 0$ ist, denn die Funktion $\exp(ikR)/R$ ist notwendig eine in $\varphi - \varphi_0$ gerade Funktion. Hat aber der Vektor $\mathfrak{D}^{(h)}$ von Gl. (2.4) nur die einzige nicht verschwindende Komponente $\mathfrak{D}_\varphi^{(h)}$, die obendrein von φ gar nicht abhängt, so besitzt nach den Gl. (2.4a, b) wegen $\text{div } \mathfrak{D}^{(h)} = 0$ das zugehörige elektromagnetische Feld in den rotationsparabolischen Koordinaten nur die drei Komponenten \mathfrak{E}_φ , \mathfrak{E}_ξ und \mathfrak{E}_η , für die im einzelnen die Gl. (2.6a, b, c) gelten

$$\mathfrak{E}_\varphi = -i\omega\epsilon_0 \cdot \mathfrak{D}_\varphi^{(h)} \quad (2.6a)$$

$$-i\omega\epsilon_0 \cdot \mathfrak{E}_\xi = \frac{(+1)}{2\sqrt{\xi}(\xi + \eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (2\sqrt{\xi\eta} \cdot \mathfrak{E}_\varphi) \quad (2.6b)$$

$$-i\omega\epsilon_0 \cdot \mathfrak{E}_\eta = \frac{(-1)}{2\sqrt{\eta}(\xi + \eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (2\sqrt{\xi\eta} \cdot \mathfrak{E}_\varphi) \quad (2.6c)$$

Die Komponente $\mathfrak{E}_\varphi^{(p)}$ des von dem magnetischen Stromring erzeugten primären Feldes läßt sich dann aber mit Hilfe der schon anderenorts [1, 2] be-

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos(pq_q) \cdot dq_q &= + \frac{8\pi i}{\lambda_0} [\xi' \eta' \cdot \xi'_q \eta'_q]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos(pq)}{(p!)^2} \\
 &\cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(s + \frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(-s + \frac{p+1}{2}\right) \cdot \\
 &\left. \begin{aligned} &(\xi'_q < \xi') & (\eta'_q < \eta') \\ &\{M_{-s, p/2}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, p/2}(-i\xi')\} \cdot \{M_{s, p/2}(-i\eta'_q) \cdot W_{s, p/2}(-i\eta')\} \\ &\{M_{-s, p/2}(-i\xi') \cdot W_{-s, p/2}(-i\xi'_q)\} \cdot \{M_{s, p/2}(-i\eta') \cdot W_{s, p/2}(-i\eta'_q)\} \\ &(\xi'_q > \xi') & (\eta'_q > \eta') \end{aligned} \right\} ds \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

wiesenen Formel (2.7) auch sofort in den Koordinaten (ξ, η, q) angeben.

$$(\xi', \eta', \xi'_q \dots) = 2k(\xi, \eta, \xi_q \dots) \quad (2.8)$$

Werden dabei zur Abkürzung an Stelle von $\xi, \eta \dots$ die durch Gl. (2.8) definierten reduzierten Koordinaten $\xi', \eta' \dots$ benutzt, so entsteht für $\mathfrak{S}_\varphi^{(p)}$ die Gl. (2.7a).

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_\varphi^{(p)} &= \frac{-2\pi \cdot I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \\
 &\left. \begin{aligned} &\{M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')\} \cdot \{M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')\} \\ &\{M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q)\} \cdot \{M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q)\} \\ &(\eta'_q < \eta') \\ &(\eta'_q > \eta') \end{aligned} \right\} \quad (2.7a) \\
 (|\sigma| < 1) &\cdot \left. \begin{aligned} &\{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)\} \cdot \{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)\} \\ &\{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi')\} \cdot \{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi')\} \\ &(\xi' < \xi'_q) \\ &(\xi' > \xi'_q) \end{aligned} \right\} ds \quad \text{A/cm}
 \end{aligned}$$

Für das zusätzliche Feld, das sich im stationären Zustand infolge der Reflexion des primären Feldes an den beiden Begrenzungsflächen $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_a$ ausbildet, machen wir den im ganzen Raumteil $\eta_i < \eta < \eta_a$ gültigen Ansatz (2.9)

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathfrak{S}_\varphi &= \frac{-2\pi I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \\
 &\left. \begin{aligned} &\{A(s) \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') + B(s) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')\} \cdot \\ &\{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)\} \cdot \{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)\} \\ &(\xi' < \xi'_q) \\ &(\xi' > \xi'_q) \end{aligned} \right\} ds \quad (2.9) \\
 (|\sigma| < 1) &\cdot
 \end{aligned}$$

Soll auf der Fläche $\eta = \eta_i$ für alle $\xi' > 0$ die Komponente \mathfrak{E}_ξ verschwinden, so muß im Hinblick auf die Gl. (2.6b) die Gl. (2.9a)

$$A(s) \cdot M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_i) + B(s) \cdot W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_i) = -M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_i) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \quad (2.9a)$$

$$A(s) \cdot M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_a) + B(s) \cdot W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_a) = -M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) \quad (2.9b)$$

erfüllt sein. Aus den gleichen Gründen muß auf der Fläche $\eta = \eta_a$ die Gl. (2.9b) bestehen. Aus diesen beiden Gleichungen können die bis dahin noch unbekannten beiden Konstanten $A(s)$ und $B(s)$ leicht berechnet werden. Faßt man alle Glieder

gehörig zusammen, so läßt sich der Ausdruck für das resultierende Feld, das der an der Stelle (ξ_0, η_0) stehende magnetische Stromring in dem Raum zwischen den beiden vollkommen leitenden Drehparabolen $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_a$ erzeugt, auf die folgende Form bringen: Es ist für $\eta_q < \eta \leq \eta_a$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\varphi(\xi, \eta) &= \mathfrak{D}_\varphi^{(p)} + \Delta \mathfrak{D}_\varphi = \frac{-2\pi I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \\ &\quad (\xi' < \xi'_q) \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} M_{s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \\ M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \end{vmatrix} \\ &\quad (\xi' > \xi'_q) \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \\ W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \end{vmatrix} \cdot \\ &\quad (|\sigma| < 1) \cdot \left| \begin{vmatrix} M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \\ W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \end{vmatrix} \right|^{-1} \cdot ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im Raumteil $\eta_i \geq \eta < \eta_a$ tritt in dem Ausdruck für $\mathfrak{D}_\varphi(\xi, \eta, \varphi)$ in der dreireihigen Determinante an Stelle des ersten links oben stehenden Elements

$$W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \text{ das Element } M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q). \quad (2.10a)$$

Unter den angeschriebenen Bedingungen über die gegenseitigen Größenverhältnisse der $\xi, \xi_q \dots$ konvergiert das Integral von (2.10) absolut und gleichmäßig.

Wir untersuchen sogleich die Frage nach den Singularitäten des Integranden von Gl. (2.10), deren Kenntnis im Hinblick auf die Lage des Integrationsweges und für die Umformung in Reihen von größter Wichtigkeit ist. In dem Integranden von (2.7a) sind die einzigen im Endlichen gelegenen Singularitäten die einfachen Pole $s = \pm 1, \pm 2 \dots$ von $s/\sin(\pi s)$, denn die Funktionen $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ sind in bezug auf s ganze transzendente Funktionen. Der Integrand der Gl. (2.10) verhält sich jedoch im Gegensatz dazu in den Punkten $s = +1, +2, +3 \dots$ durchaus regulär, da für alle ganzzahligen Werte von n und p zwischen den Funktionen M und W die Relation (2.11) besteht mit $L_n^{(p)}(z)$ als Laguerre-Polynom,

$$W_{n + \frac{p+1}{2}, \frac{p}{2}}(z) = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)} \cdot M_{n + \frac{p+1}{2}, \frac{p}{2}}(z) = (-1)^n \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{p+1}{2}} \cdot L_n^{(p)}(z) \quad (2.11)$$

die von der äußersten rechten Gleichungsseite abgesehen unverändert auch für die Ableitungen dieser Funktionen nach z gültig bleibt. In der dreireihigen Determinante von (2.10) werden dann aber die zweite und dritte Zeile einander gleich. Hingegen sind die Punkte $s = -1, -2, -3 \dots$ nach wie vor auch einfache Pole des Integranden von (2.10). Zu ihnen gesellen sich aber als weitere singuläre Stellen, und zwar wiederum in Gestalt einfacher Pole, die Nullstellen des Aus-

drucks (2.12), der in (2.10) als Nenner auftritt. Wir gelangen zu einer vorläufig ausreichenden Information über die Lage der Nullstellen von (2.12),

$$\Delta'_{s, \frac{1}{2}}(\eta'_i, \eta'_a) = \begin{vmatrix} M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) & M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_i) \\ W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) & W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_i) \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

wenn für die darin vorkommenden Funktionen und deren Ableitungen ihre asymptotischen Näherungen (2.13a, b) eingesetzt werden. Für die Determinante (2.12) kommt dadurch der Näherungsausdruck (2.13) zustande.

$$M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} (i \eta'_a \cdot s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \left[2 \sqrt{(-i \eta'_a) \cdot s} - \frac{\pi}{4} \right] \quad \left(-i = e^{-\frac{\pi i}{2}} \right) \quad (2.13a)$$

$$W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_i) \sim -2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-s + s \ln s} \cdot \left(-\frac{s}{i \eta'_i} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left[2 \sqrt{(-i \eta'_i) \cdot s} - \frac{\pi}{4} - \pi s \right] \quad (2.13b)$$

$$\Delta_{s, \frac{1}{2}}(\eta'_i, \eta'_a) \sim \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-s + s \ln s} (\eta'_i \eta'_a e^{-\pi i})^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \pi s \cdot \sin \left[2 s^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} (\sqrt{\eta'_a} - \sqrt{\eta'_i}) \right]. \quad (2.13)$$

Seinem Aufbau zufolge besitzt demnach $\Delta'_{s, \frac{1}{2}}$ in bezug auf s eine unendliche Folge einfacher Nullstellen, die auf der positiv imaginären Achse der s -Ebene liegen. Die kleinste dieser Nullstellen läßt sich für beliebige Werte des Argumentes nur schwer genauer angeben. Ohne lange Rechnungen kann darüber nur soviel gesagt werden, daß diese Nullstelle um so kleiner ausfällt, je größer die Differenz $\sqrt{\eta'_a} - \sqrt{\eta'_i}$ gewählt wird. Hingegen läßt sich mit leichter Mühe die Frage entscheiden, unter welchen Bedingungen die kleinste oder erste Nullstelle von (2.13) in den Nullpunkt der s -Ebene selbst hineinrückt. Da nämlich für $s = 0$ nach (2.14) und (2.15) die Funktionen M und W in die einfachen Kreisfunktionen entarten, so stellt sich in diesem besonderen Falle auch die Determinante

$$M_{0, \frac{1}{2}}(-i \eta') = -2 i \sin \left(\frac{\eta'}{2} \right) \quad (2.14a)$$

$$M'_{0, \frac{1}{2}}(-i \eta') = \cos \left(\frac{\eta'}{2} \right) \quad (2.14b)$$

$$W_{0, \frac{1}{2}}(\pm i \eta') = e^{\mp \frac{i \eta'}{2}} \quad (2.15a)$$

$$W'_{0, \frac{1}{2}}(\mp i \eta') = -\frac{1}{2} e^{\mp \frac{i \eta'}{2}} \quad (2.15b)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{r, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{\partial r} \right]_{r=0} = \cos \frac{\eta'}{2} \cdot \text{Ci}(\eta') + \sin \frac{\eta'}{2} \cdot \text{Si}(\eta') - \cos \frac{\eta'}{2} \cdot \ln(\gamma \eta') \quad (2.15\alpha)$$

$$-i \left[\frac{\partial M'_{r, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{\partial r} \right]_{r=0} = \cos \frac{\eta'}{2} \cdot \text{Si}(\eta') + \sin \frac{\eta'}{2} \cdot [\ln(\gamma \eta') - \text{Ci}(\eta')]. \quad (2.15\beta)$$

$$\ln \gamma = C = 0,577 \, 2157$$

(2.13) in der weitaus einfacheren Form der Gl. (2.16) dar. Aus dieser Darstellung

$$\Delta'_{0, \frac{1}{2}}(\eta'_i, \eta'_a) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\eta'_a - \eta'_i}{2} \right) \quad (2.16)$$

folgt aber sofort, daß die erste und kleinste Wurzel von (2.13) in bezug auf s gerade der Null gleich wird, wenn η'_a und η'_i die Gl. (2.16a, α) erfüllen.

$$\eta'_a - \eta'_i = 2\pi \quad (2.16a)$$

$$\eta_a - \eta_i = \frac{\lambda_0}{2} \quad (2.16\alpha)$$

In dem allgemeineren Falle der Gl. (2.16b) ist die Stelle $s = 0$ nicht mehr die

$$\eta'_a - \eta'_i = 2\pi p \quad (2.16b)$$

$$\eta_a - \eta_i = \frac{\lambda_0}{2} \cdot p \quad (p = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.16\beta)$$

erste und kleinste Wurzel, sondern die p -te Wurzel. Die ersten $p-1$ Wurzeln von (2.13) sind dann negativ imaginär.

Der Integrationsweg in Gl. (2.10), der in der Ausgangsgl. (2.7) die reelle Achse der s -Ebene noch an einer beliebigen Stelle zwischen den Punkten $s = -1$ und $s = +1$ schneiden durfte, muß in der endgültigen Lösungsgleichung zwischen den Punkten $s = -1$ und $s = 0$ hindurchlaufen, denn täte er dies zwischen den Punkten $s = +1$ und $s = 0$, so könnte man, ohne die absolute Konvergenz des Integrals (2.10) zu gefährden, den Integrationsweg beliebig weit nach rechts verschieben, ohne je auf eine im Endlichen gelegene Singularität zu stoßen. Die Komponente \mathfrak{F}_p würde daher bei dieser Lage des Integrationsweges identisch verschwinden. An einer identisch verschwindenden Lösung besteht aber natürlich kein Interesse.

Im übrigen erkennt man ohne weiteres an dem Aufbau der Gl. (2.10), daß sie in der Tat eine Lösung unserer Aufgabe darstellt. Einmal erfüllt sie die für \mathfrak{F}_p geltende Differentialgl. (2.17) so gut wie die Gl. (2.7). Darüber hinaus befriedigt sie aber auch die Randbedingungen für \mathfrak{E}_z , denn die gemäß Gl. (2.6b)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \mathfrak{F}_p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \mathfrak{F}_p}{\partial \eta} \right) - \frac{\xi + \eta}{4\xi\eta} \cdot \mathfrak{F}_p + k^2 \mathfrak{F}_p = 0 \quad (2.17)$$

nach Erweiterung mit $(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}$ vorzunehmende Ableitung von (2.10) nach η erzeugt in der dreireihigen Determinante nach dem Übergang von η zu η_a und nach Herausnahme des gemeinsamen Faktors $W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)$ zwei gleichgebaute erste Zeilen. Das gleiche trifft nach Berücksichtigung von (2.10a) für $\eta = \eta_i$ zu.

3. Die axialsymmetrische Strahlung im Innenraum des einzelnen hohlen Drehparabols

Wir gehen nun die verschiedenen, in der allgemeinen Lösung (2.10) steckenden Sonderfälle im einzelnen durch. Zunächst wollen wir uns mit dem Fall beschäftigen, daß das innere Drehparabol mit der Oberfläche $\eta = \eta_i$ kleiner und kleiner wird und schließlich auf Null zusammenschrumpft. Nun ist in Rücksicht auf

$$M_{s, \frac{1}{2}}(z) = z \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot {}_1F_1(1-s; 2; z) \quad (3.1)$$

Gl. (3.1) für $z = 0$

$$M_{s, \frac{1}{2}}(0) = 0 \quad (3.1a)$$

$$M'_{s, \frac{1}{2}}(0) = 1. \quad (3.1b)$$

Andererseits bestehen für die Funktion $W_{s, \frac{1}{2}}(z)$ im Hinblick auf die Gl. (3.2) die beiden Grenzwertgl. (3.2a, b). Bei immer kleiner werdenden Werten von

$$W_{s, \frac{1}{2}}(z) = \frac{\ln z}{\Gamma(-s)} M_{s, \frac{1}{2}}(z) + \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(1-s)} + \frac{z \cdot e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(-s) \cdot \Gamma(1+s)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\lambda-s)}{\lambda!(1+\lambda)!} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (3.2) \\ \cdot \{\Psi(1+\lambda-s) - \Psi(2+\lambda) - \Psi(1+\lambda)\} \cdot z^{\lambda} \end{array} \right.$$

$$W_{s, \frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \quad (3.2a)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} W'_{s, \frac{1}{2}}(z) \approx \frac{\ln z}{\Gamma(1-s)} \quad (3.2b)$$

η'_i wird also sowohl in der zwei- wie in der dreireihigen Determinante von Gl. (2.10) das Element $W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_i)$ mehr und mehr zu dem die Größe der Determinante allein bestimmenden Glied. Der Grenzwert, dem unter diesen Umständen der Quotient aus der drei- und zweireihigen Determinante zustrebt, läßt sich nach diesem Hinweis ohne Schwierigkeit bestimmen.

3.1. Die Lösungsgleichung bei Anregung durch den freistehenden magnetischen Stromring

Die Durchführung des eben beschriebenen Grenzüberganges führt für die einzige nichtverschwindende Komponente \mathfrak{H}_φ des resultierenden magnetischen Feldes zu der folgenden Integraldarstellung: Es ist für $\eta_q < \eta \leq \eta_a$

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi, \eta) = \frac{-2\pi I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot (\xi' \eta')^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\xi < \xi_q) \\ M_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) \\ M_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \\ (\xi > \xi_q) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} W_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta') \quad W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta') \quad M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) \end{array} \right\} \cdot \frac{M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_q)}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \cdot ds \quad (0 < \sigma < 1). \quad (3)$$

Um hieraus den für ein $0 < \eta < \eta_q$ gültigen Ausdruck zu erhalten, braucht man nur in der zweiten Zeile der Gleichung die Argumente η' und η'_q miteinander zu vertauschen. Offenbar bewahrt dieser Ausdruck in der Achse des Drehparabols, wo entweder $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ ist, einen durchaus endlichen Wert. In Rücksicht auf den Raumangel verzichten wir darauf, dies Integral in eine Reihe aufzulösen, sondern verweisen wegen der dabei zu beachtenden Regeln auf den Abschnitt 3.12.

3.11. Die Lösungsgleichung bei Anregung durch eine in der Grenzfläche $\eta = \eta_a$ wirksame zonale EMK

Die Anregung des Strahlungsfeldes durch einen freistehenden magnetischen Stromring im Innern eines hohlen Drehparabols entartet durch den Übergang von η'_q zu η'_a oder zu Null in zwei Anregungsformen, denen eine besondere praktische Bedeutung zukommt. Rückt nämlich der magnetische Stromring in die innere Oberfläche des Drehparabols hinein, so erzeugt er dasselbe äußere Feld wie eine fremdgespeiste zonale EMK, die zwischen den längs des Stromrings

aufgeschnittenen beiden Teilen des Drehparabols ihren Sitz hat. Die Größe U dieser EMK ist dabei direkt mit $I_\varphi^{(h)}$ identisch. Die Gl. (3.3), von der für die Durchführung des Grenzüberganges die im Raumteil $0 \geq \eta < \eta_a$ gültige Form zu nehmen ist, vereinfacht sich dabei in Rücksicht auf die Gl. (3.4) ganz erheblich, so daß für $\mathfrak{H}_\varphi(\xi, \eta)$ nunmehr die Gl. (3.5) zustande kommt.

$$\begin{vmatrix} W_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) & W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) & M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a) \end{vmatrix} = \frac{1}{I(1-s)} \quad (3.4)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi, \eta) = \left. \begin{aligned} & -\frac{2\pi U(\xi'_q)}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot (\xi' \eta')^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} I'(1-s) \cdot \\ & \left. \begin{aligned} & (\xi' < \xi'_q) \\ & \left\{ \begin{aligned} & M_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) \\ & M_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \end{aligned} \right\} \cdot \frac{M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \cdot ds \\ & (\xi' > \xi'_q) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Das Verschwinden von \mathfrak{E}_ξ auf der Fläche $\eta = \eta_a$ zeigt sich in dieser Lösung daran, daß nach dem Verschwinden des Nenners im Integranden von (3.5) der Integrationsweg beliebig weit nach rechts verschoben werden kann, ohne dabei eine Singularität zu passieren. Das Integral ist dann identisch Null.

3.12. Die Lösungsgleichungen bei Anregung durch einen in der Achse liegenden achsenparallelen elektrischen Dipol

Anstatt den Stromring wie im vorstehenden Abschnitt in die äußere Begrenzungsfläche hineinrücken zu lassen, können wir auch seinen Durchmesser ständig verkleinern, bis er zu einem Kreise von sehr kleinem Radius wird, der die Achse des Drehparabols umschlingt. In seiner Wirkung nach außen nähert er sich dann mehr und mehr der eines elektrischen Dipols, der auf der Windungsfläche des magnetischen Stromrings senkrecht steht und also die Richtung der Achse der konfokalen Drehparabole hat. Das Moment dieses elektrischen Dipols von der Größe $I_\xi^{(e)} \delta \zeta$ hängt mit $I_\varphi^{(h)}$ und der der von dem Stromring umschlungenen elementaren Fläche F_q bekanntlich über die Gl. (3.6) zusammen. Es versteht sich von selbst, daß natürlich bei diesem Grenzübergang, wenn der immer kleiner

$$-i \omega \epsilon_0 \cdot F_q \cdot I_\varphi^{(h)} = -\frac{2\pi i}{\lambda_0} \cdot \frac{F_q \cdot I_\varphi^{(h)}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = -I_\xi^{(e)} \cdot \delta \zeta \quad (3.6)$$

werdende Stromring nach außen überhaupt eine endliche Wirkung ausüben soll, die Intensität $I_\varphi^{(h)}$ des magnetischen Stromrings in demselben Maße zunehmen muß, wie die umschlungene Fläche F_q dabei abnimmt.

Geht nun $\varrho_a = 2 \cdot (\xi_q \cdot \eta_q)^{\frac{1}{2}}$ gegen Null, so kann dies in den Variablen ξ_q und η_q gesehen entweder eine Folge des Verschwindens von ξ_q oder auch von η_q sein. Wird $\varrho_a = 0$, weil $\xi_q \rightarrow 0$ strebt, während η_q seinen ursprünglichen Wert η_a mit $0 < \eta_q < \eta_a$ beibehält, so kommt gemäß Abb. 1 der aus dem magnetischen Stromring sich entwickelnde elektrische Dipol schließlich in den Teil der Parabelachse zu liegen, der sich zwischen dem Scheitelpunkt der Parabel $\eta = \eta_a$ und

dem Brennpunkt erstreckt. Die in diesem Grenzfall aus (3.3) entstehende Formel für \mathfrak{H}_φ muß dann in die für \mathfrak{H}_φ aufgestellte Beziehung der älteren Arbeit übergehen. Nun ist nach Gl. (3.1) für $\xi'_q \rightarrow 0$

$$-M_{s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) \approx i \xi'_q = +2 i k \xi_q = \frac{4 \pi i}{\lambda_0 \eta_a} \cdot \xi_q \cdot \eta_a = \frac{\pi i}{\lambda_0 \eta_a} \cdot \varrho_q^2 = \frac{i}{\lambda_0 \eta_a} \cdot F_q.$$

Im Hinblick auf die Gl. (3.6) wird dann für $\xi'_q \rightarrow 0$

$$-\frac{2 \pi^2 \cdot I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) = \frac{\pi}{\lambda_0 \eta_a} \cdot \frac{2 \pi i}{\lambda_0} \cdot \frac{F_q \cdot I_\varphi^{(h)}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \frac{\pi}{\lambda_0 \eta_a} \cdot I_\xi^{(e)} \cdot \delta_\infty^2 = \frac{k^2 \cdot I_\xi^{(e)} \delta_\infty^2}{\eta_a}.$$

Mithin erhalten wir in diesem Falle für \mathfrak{H}_φ im Raumteil $\eta_a < \eta < \eta_a$ die Integraldarstellung (3.7). Die im Raumteil $0 \leq \eta < \eta_a$ gültige

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{k^2}{\eta_a \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{I_\xi^{(e)} \cdot \delta_\infty^2}{2 \pi i} \cdot \int_{-\sigma - i \infty}^{-\sigma + i \infty} \frac{s}{\sin(\pi s)} \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot \frac{M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \cdot \left| \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta')} \cdot \frac{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \right| \cdot ds. \quad (0 < \sigma < 1) \quad (3.7)$$

Beziehung geht aus (3.7) durch die Vertauschung der Argumente η_a und η unter dem Integralzeichen hervor. In dieser zweiten Form stimmt die Gl. (3.7) mit der Gl. (3.5c) der älteren Arbeit überein.

Wird andererseits $\varrho_q = 0$, weil $\eta_q \rightarrow 0$ geht, während ξ_q seinen ursprünglichen Wert behält, so liegt nach Vollzug des Grenzüberganges gemäß Abb. 1 der aus dem magnetischen Stromring entstehende elektrische Dipol auf dem Teil der Parabelachse, der sich vom Brennpunkt aus bis ins Unendliche erstreckt. Damit ist dann die Dipollage erreicht, deren Behandlung in der älteren Arbeit noch ausgeschlossen wurde. Nach dem Voranstehenden geht aber für $\eta'_q \rightarrow 0$ der Ausdruck

$$\frac{2 \pi^2 I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_q) \rightarrow -\frac{k^2 I_\xi^{(e)} \delta_\infty^2}{\xi'_q}.$$

Liegt also der axial gerichtete elektrische Dipol auf dem Teil der Parabelachse, der durch $\eta = 0$ beschrieben wird, so besteht für \mathfrak{H}_φ im Raumteil $\xi_q < \xi < \infty$ die Integraldarstellung:

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = + \frac{k^2 \cdot I_\xi^{(e)} \cdot \delta_\infty^2}{\xi'_q \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2 \pi i} \cdot \int_{-\sigma - i \infty}^{-\sigma + i \infty} \frac{s}{\sin(\pi s)} \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot \frac{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q)}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \cdot \left| \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{M_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta')} \cdot \frac{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i \eta'_a)} \right| \cdot ds \quad (0 < \sigma < 1) \quad (3.8)$$

Um die im Raumteil $0 \leq \xi < \xi_q$ gültige Beziehung für \mathfrak{H}_φ zu erhalten, braucht man lediglich in (3.8) unter dem Integralzeichen die Größen ξ' und ξ'_q miteinander zu vertauschen.

3.2. Die Reihenentwicklungen beim Innenraumproblem

Aus der Integraldarstellung (3.8) lassen sich mittels des Residuensatzes auf die gleiche Weise wie in der älteren Arbeit aus der Gl. (3.7) zwei Reihenentwick-

lungen herleiten, von denen die eine und wichtigste, auf die wir uns deshalb an dieser Stelle beschränken wollen, dadurch gewonnen werden kann, daß man den Integrationsweg von (3.8) über die auf der imaginären Achse von (3.8) gelegenen Pole des Integranden hinwegschiebt und ihn dann in der Halbebene der $\text{Re}(s) > 0$ ins Unendliche rücken läßt. Dabei sind in diesem Teil der s -Ebene nach den früheren Darlegungen die Pole des Integranden die durch Gl. (3.9) beschriebenen

$$M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (3.9)$$

$$2\sqrt{\tau'_n \cdot \eta'_a} \approx \pi n + \frac{3\pi}{4} \quad (3.9\alpha)$$

$$\eta'_a = \pi(2p + 1) \quad (3.9\beta)$$

Nullstellen von $M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)$ in bezug auf s , die rein imaginär sind und im folgenden mit $i\tau'_n$ bezeichnet werden mögen. Die großen Wurzeln von (3.9) befolgen näherungsweise die Gl. (3.9 α), und die kleinste Wurzel oder die p -te der niedrigsten Wurzeln wird nach Gl. (2.14b) gerade gleich Null, wenn η'_a die Gl. (3.9 β) erfüllt. Die geschilderte Behandlung des Integrationsweges ist zulässig, solange z. B. für ein $\xi_q < \xi < \infty$ die Ungleichung $\xi > \xi_q + \eta + 2(\eta \cdot \xi_q)^{\frac{1}{2}}$ erfüllt ist. Der Gültigkeitsbereich der auf diese Weise entstehenden Reihenentwicklung (3.9a) ist aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\varphi(\xi', \eta') = & -\frac{k^2}{\pi\sqrt{\xi'\eta'}} \cdot I_\xi^{(\epsilon)} \delta_\xi^\epsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tau'_n \cdot \Gamma(i\tau'_n) \cdot M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{-i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot \\ & \frac{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)/\xi'_q}{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) [\partial M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)/\partial x]_{x=\tau'_n}} \quad \text{A/cm} \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$(\xi_q < \xi < \infty)$

hinterher an diese Bedingung nicht länger gebunden, da die Reihe selbst schon konvergiert, sobald nur $\xi > \xi_q$ ist. In dem Bereich $0 < \xi < \xi_q$ tritt an Stelle der Entwicklung (3.9a) für \mathfrak{F}_φ die Entwicklung (3.9b). Der Vollständigkeit halber und zum

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\varphi(\xi', \eta') = & -\frac{k^2}{\pi\sqrt{\xi'\eta'}} \cdot I_\xi^{(\epsilon)} \delta_\xi^\epsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tau'_n \cdot \Gamma(i\tau'_n) \cdot M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(i\xi') \cdot \\ & \frac{W_{-i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)/\xi'_q}{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) [\partial M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)/\partial x]_{x=\tau'_n}} \quad \text{A/cm} \end{aligned} \quad (3.9b)$$

$(0 < \xi < \xi_q)$

bequemerem Vergleich geben wir schließlich für \mathfrak{F}_φ auch noch die aus Gl. (3.7) folgende Entwicklung (3.9c) an, die auch schon in der älteren Arbeit zu finden ist. Sie gilt dann, wenn der Dipol auf der Rotationsachse der Parabel zwischen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\varphi(\xi', \eta') = & -\frac{k^2}{\pi\sqrt{\xi'\eta'}} \cdot I_\xi^{(\epsilon)} \delta_\xi^\epsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tau'_n \cdot \Gamma(i\tau'_n) \cdot M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{-i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot \\ & \frac{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)/\eta'_a}{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) [\partial M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a)/\partial x]_{x=\tau'_n}} \quad \text{A/cm} \end{aligned} \quad (3.9c)$$

$(\xi > 0)$

dem Scheitelpunkt und dem Brennpunkt liegt. Wie man mit Hilfe der Gl. (3.1) sofort erkennt, entsteht für \mathfrak{F}_φ im Falle eines im Brennpunkt selbst angeordneten Dipols aus den Gl. (3.9a) und (3.9c) genau dieselbe Entwicklung. Beim Durchgang von ξ durch die Stelle ξ_q verhält sich im übrigen \mathfrak{F}_φ durchaus stetig.

Aus Rummangel muß es unterbleiben, auch noch die gemäß (2.6b, c) aus den Gl. (3.9) folgenden Reihenentwicklungen für \mathfrak{E}_ξ und \mathfrak{E}_η besonders anzuschreiben. Ebenso müssen wir es uns versagen, hier noch einmal auf eine Diskussion über die Eigenschaften der verschiedenen Teilwellen einzugehen, in die den Gl. (3.9) zufolge die resultierende Strahlung zerfällt. Wir verweisen auch in dieser Hinsicht auf die ältere Arbeit. Dahingegen möge auch an dieser Stelle noch einmal auf die Tatsache hingewiesen werden, daß unter diesen unendlich vielen Teilwellen besonders derjenigen eine große praktische Bedeutung zukommt, für die $\tau'_1 = 0$ wird, weil η'_a nach Gl. (3.9 β) dann gerade gleich π ist. Im Hinblick auf die Gl. (2.14) und (2.15) fällt die Beziehung für \mathfrak{S}_φ und damit auch für die anderen beiden Komponenten bei dieser Teilwelle sehr einfach aus. Entsprechend den schon oben unterschiedenen drei Fällen lautet sie:

$$\mathfrak{S}_\varphi^{(1)}(\xi', \eta') = \frac{k^2}{\pi \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot I_\xi^{(e)} \delta_\xi \frac{\sin(\eta'/2)}{N(\eta'_a)} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin(\xi'_a/2)}{(\xi'_a/2)} \cdot e^{\frac{i\xi'_a}{2}} & (\xi_a \leq \xi < \infty) \\ \frac{\sin(\xi'/2)}{(\xi'/2)} \cdot e^{\frac{i\xi'}{2}} & (0 < \xi \leq \xi_a) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$N(\eta'_a) = \ln(\gamma \eta'_a) - \text{Ci}(\eta'_a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin(\eta'_a/2)}{(\eta'_a/2)} \cdot e^{\frac{i\eta'_a}{2}} & (0 < \xi < \infty) \end{array} \right.$$

Wegen der weiteren Schlußfolgerungen vergleiche man die ältere Arbeit.

4. Die axialsymmetrische Strahlung im Außenraum eines einzelnen Drehparabols

Wir wenden uns nun der Besprechung des anderen Grenzfalles der Gl. (2.10) zu, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die äußere Begrenzungsfläche $\eta = \eta_a$ ins Unendliche gerückt worden ist. Um entscheiden zu können, wie sich durch diesen Grenzübergang die zwei- und dreireihigen Determinanten von Gl. (2.10) vereinfachen, halten wir uns an die beiden asymptotischen Ausdrücke (4.1a, b) für die Funktionen $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ bei einem über alle Grenzen wachsenden Wert des

$$W_{s, \frac{1}{2}}(z) \sim z^s \cdot e^{-\frac{s}{2}} \cdot {}_2F_0\left(1-s, -s; -\frac{1}{z}\right) \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2} \quad (4.1a)$$

$$M_{s, \frac{1}{2}}(z) \sim \frac{z^{-s} \cdot e^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(1-s)} \cdot {}_2F_0\left(1+s, s; \frac{1}{z}\right) - \frac{z^s \cdot e^{-\frac{s}{2}}}{\Gamma(1+s)} \cdot e^{\pm \pi i s} {}_2F_0\left(-s, 1-s; -\frac{1}{z}\right) \quad (4.1b)$$

Argumentes. In Gl. (4.1b) gilt dabei in $\exp(\pm \pi i s)$ das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem $-3\pi/2 < \arg(z) < +\pi/2$ oder $-\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$ ist. Solange dann k gemäß der bisherigen Annahme eine rein reelle Zahl ist, behalten allerdings beide Funktionen auf Grund dieser Gleichungen für ein $z = -i \cdot \eta'_a = -2ik \cdot \eta_a$ auch im Falle eines $\eta_a \rightarrow \infty$ dieselbe Größenordnung. Bei Fragen dieser Art ist es jedoch notwendig, zugleich auch solche Fälle mitzubetrachten, bei denen sich das Medium, in dem sich die Ausbreitung vollzieht, dissipativ verhält. Bei dem hier zugrunde gelegten Zeitgesetz $\exp(-i\omega t)$ hat in derartigen Medien die Wellenzahl k eine wenn auch in der Regel nur sehr kleine positiv imaginäre Komponente. Dann geht für $\eta_a \rightarrow \infty$ die obige Funktion $W_{s, \frac{1}{2}}$ mit dem Argument $-2ik$ gegen Null, die Funk-

tion $M_{s, \frac{1}{2}}$ aber gegen Unendlich. In der zwei- und dreireihigen Determinante von Gl. (2.10) wird daher für $\eta'_a \rightarrow \infty$ das Element $M'_{s, \frac{1}{2}}$ das die Größe der Determinante allein bestimmende Glied.

4.1. Die Lösungsgleichung bei Anregung durch den freistehenden magnetischen Stromring

Für die Komponente \mathfrak{H}_φ des Strahlungsfeldes, das ein magnetischer Stromring im Außenraum eines mit dem Stromring coaxialen Drehparabols $\eta = \eta_i$ erzeugt, gelangt man nach den obigen Bemerkungen zu der folgenden Integraldarstellung: Es ist im Raumteil $\eta_q < \eta < \infty$

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{-2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{I_\varphi^{(h)}}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot$$

$$(\xi < \xi_q) \quad (4.2)$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \\ M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \end{array} \right\} \cdot \left| \begin{array}{cc} W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \\ M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \end{array} \right| \cdot \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)} \cdot ds.$$

$$(\xi > \xi_q) \quad (\sigma < 1, \eta_q < \eta < \infty)$$

Für ein $\eta_i < \eta < \eta_q$ hat man unter dem Integralzeichen η'_q mit η' zu vertauschen. Wie das Ausgangsintegral (2.10), so konvergiert auch das Integral (4.2) unter den angegebenen Bedingungen gleichmäßig und absolut. Man beachte, daß für Punkte in der Achse außerhalb des Drehparabols $\eta = \eta_i$ nur $\xi = 0$ werden kann. Selbstverständlich muß in solchen Punkte \mathfrak{H}_φ verschwinden, und nach Gl. (4.2) ist das auch in der Tat der Fall. Die Lage der Singularitäten ist bei der vorliegende Lösung eine andere als früher. Wir werden jedoch auf diese Frage erst im Abschnitt 4.2 eingehen. An dieser Stelle mag der bloße Hinweis genügen, daß auch die Funktion $W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)$ im Nenner von (4.2) eine unendliche Kette einfacher Pole s_p besitzt, für die $\text{Re}(s_p) > 0$ ist, so daß in (4.2) sowie in den daraus abgeleiteten Gl. (4.3) und (4.4) der Integrationsweg wie früher zwischen zwei nach links und rechts auseinanderstrebenden Folgen unendlich vieler einfacher Pole hindurchläuft und sie voneinander trennt. Vorerst sollen noch zwei Grenzfälle der Gl. (4.2) hergeleitet werden.

4.11. Die Lösungsgleichung bei Anregung durch eine in der Begrenzungsfläche $\eta = \eta_i$ wirksame zonale EMK

Wir lassen wie im Abschnitt 3 den magnetischen Stromring in die Oberfläche des den Außenraum nach innen begrenzenden Drehparabols $\eta = \eta_i$ hineintrücken. Es wird dann in der Determinante von (4.2) $\eta'_q = \eta'_i$ und im Hinblick auf die Gl. (3.4) geht dadurch der Ausdruck (4.2) in die weit einfachere Beziehung (4.3) über. Die Intensität $I_\varphi^{(h)}$ des Stromrings ist darin wiederum durch die Spannung $U(\xi'_q)$ ersetzt worden. Diese Spannung mißt wie vordem die im Querschnitt

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = + \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_q)}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} \Gamma(s+1) \cdot \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)} \cdot$$

$$(4.3)$$

$$(|\sigma| < 1, \eta_i < \eta < \infty) \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \\ M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \end{array} \right\} \cdot ds \quad \begin{array}{l} (\xi' < \xi'_q) \\ (\xi' > \xi'_q) \end{array}$$

$\xi = \xi_q$ von außen eingeprägte zonaie EMK, die man sich von einer fremden Hochfrequenz-Stromquelle geliefert zu denken hat und die zwischen zwei dicht gegenüberliegenden Querschnittsflächen des bei $\xi = \xi_q$ aufgeschnittenen Drehparabols $\eta = \eta_i$ zur Wirkung kommt. Eine solche EMK erzeugt nach außen hin genau das gleiche Feld wie ein an der gleichen Stelle angeordneter magnetischer Stromring mit der Intensität $I_\varphi^{(h)} = U$, so daß sie geradezu als der physikalische Repräsentant eines auf der Leiteroberfläche aufliegenden Stromrings angesehen werden kann.

Die Bedingung eines für alle $0 \leq \xi < \infty$ auf $\eta = \eta_i$ verschwindenden Wertes von \mathfrak{E}_ξ wird durch die Lösung (4.3) im Hinblick auf die Gl. (2.6 b) dadurch gewährleistet, daß in diesem Falle der Integrand von (4.3) rechts vom Integrationsweg singularitätenfrei ist, und da dann der Weg beliebig weit nach rechts verschoben werden kann, ohne die Konvergenz einzubüßen, so ist in der Tat $\mathfrak{E}_\xi = 0$.

4.12. Die Lösungsgleichung bei Anregung durch einen in der Achse liegenden elektrischen Dipol

Geht in der Gl. (4.2) der Abstand $\varrho_q = 2(\xi_q \cdot \eta_q)^{\frac{1}{2}}$ des Stromrings von der Rotationsachse gegen Null dadurch, daß bei festgehaltenem Wert von η_q die Parabelkoordinate ξ_q immer kleiner wird, so verhält sich wieder bei entsprechender Zunahme von $I_\varphi^{(h)}$ der magnetische Stromring in seiner Wirkung nach außen hin mehr und mehr wie ein elektrischer Dipol, dessen Richtung mit der Rotationsachse zusammenfällt. Selbstverständlich kann er dort auf dem Abschnitt $\xi = 0$ dieser Achse nur in solche Punkte dieser Achse zu liegen kommen, für die $\eta_q \leq \eta_i$ ist, da ja der übrige Teil dieses Achsenabschnittes von dem gegebenen Drehparabol umhüllt wird. Im übrigen vollzieht sich dieser Grenzübergang nach genau den gleichen Gesetzen wie im Abschnitt 3.12, und es kommt somit für die Komponente \mathfrak{H}_φ des zugehörigen Strahlungsfeldes schließlich die folgende Darstellung zustande: Es wird im Raumteil $\eta_q \leq \eta < \infty$

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{k^2 \cdot I_\xi^{(e)} \delta \xi}{\eta_q' \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{s}{\sin(\pi s)} \cdot \frac{W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_q')} \cdot \left[\frac{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_q')}{M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_q')} \cdot \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_q')}{M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta_q')} \right] \cdot ds. \quad (4.4)$$

Um den für ein $\eta_i \leq \eta < \eta_q$ gültigen Ausdruck zu erhalten, braucht man lediglich unter dem Integralzeichen von (4.4) η' mit η_q' zu vertauschen. Das Verschwinden von \mathfrak{E}_ξ tritt im vorliegenden Falle aus demselben Grunde ein wie bei der Gl. (4.3).

4.2. Die Reihenentwicklungen beim Außenraumproblem

Um auch beim Außenraumproblem wenigstens einen ersten Einblick in die physikalische Aussage der Lösung zu gewinnen, müssen wir wie beim Innenraumproblem zu geeigneten Reihenentwicklungen zu gelangen suchen. Wir werden uns dabei im folgenden in erster Linie an die Gl. (4.3) halten. Der Integrand dieser Gleichung weist wie der der davon nur wenig verschiedenen Gl. (4.4) zwei unendliche Ketten von einfachen Polen auf. Die eine dieser Polketten rührt von der

Γ -Funktion her und wird von den Punkten $s = -n$ mit $n = 1, 2, 3 \dots$ gebildet. Um mit Hilfe des Residuensatzes nach den Residuen dieser einfachen Pole entwickeln zu können, müssen wir den Integrationsweg von (4.3), der jedenfalls noch rechts von den am weitesten rechts gelegenen Polen dieser Kette verläuft, nach links hinüberziehen. Mit Hilfe der für die Funktionen $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ bei unbeschränkt wachsenden Werten von s gültigen asymptotischen Entwicklungen, wie sie z. B. in der unter 1) erwähnten Arbeit enthalten sind, läßt sich leicht entscheiden, daß eine solche Linksverschiebung in der Tat unbegrenzt möglich ist, sobald die unter der Gl. (4.5) stehende Größenbeziehung erfüllt ist. Die Entwicklung für \mathfrak{H}_φ , die auf diese Weise zustande kommt, lautet dann wie folgt: Es ist für alle $\eta_i \leq \eta < \infty$:

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi' \eta') = + \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_q)}{\sqrt{\xi'_q \eta'}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot M_{n, \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot M_{n, \frac{1}{2}}(-i \xi'_q) \cdot \frac{W_{-n, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{W_{-n, \frac{1}{2}}(-i \eta'_q)} \quad (4.5)$$

$$(\sqrt{\eta} > \sqrt{\eta_i} + \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_q}).$$

Die Entwicklung (4.5) gilt also vornehmlich für solche Punkte des Strahlungsfeldes, die gemäß Abb. 1 links von der durch den Brennpunkt gehenden und auf der Rotationsachse des Parabols senkrecht stehenden Ebene liegen, und sie ist unter der angegebenen Bedingung absolut und gleichmäßig konvergent. Auf der Oberfläche der den Außenraum nach innen begrenzenden Parabolfläche gilt sie nirgendwo. Daher ist es auch für den Entscheid über ihre Richtigkeit gegenstandslos, daß sie nicht ohne weiteres erkennen läßt, ob durch sie die Bedingung eines verschwindenden Wertes von \mathfrak{E}_z längs der Fläche $\eta = \eta_i$ erfüllt ist. Auch befriedigt zwar jedes Glied der Reihenentwicklung (4.5) für sich selbst die Differentialgleichung für \mathfrak{H}_φ , jedoch gilt dies eben nicht von der gerade erwähnten Grenzbedingung.

Für sehr große Werte von η' , die obendrein der zu (4.5) gehörigen Vorschrift genügen, bestimmt im wesentlichen schon das erste Glied in der Entwicklung von (4.5) die Größe von \mathfrak{H}_φ , denn es ist in diesem Falle

$$W_{-n, \frac{1}{2}}(-i \eta') \sim (-i \eta')^{-n} \cdot e^{+i k \eta}.$$

Ferner ist nach Gl. (3.1)

$$M_{1, \frac{1}{2}}(-i \xi') = (-i \xi') \cdot e^{+i k \xi} \text{ und außerdem } W_{-1, \frac{1}{2}}(z) = z \cdot e^{-\frac{z}{2}} \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t} \cdot e^{-zt} dt$$

$$= e^{-\frac{z}{2}} + z \cdot e^{\frac{z}{2}} \text{Ei}(-z).$$

Daraus folgt dann

$$W'_{-1, \frac{1}{2}}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2} + \frac{2+z}{2} \cdot e^{\frac{z}{2}} \text{Ei}(-z).$$

Das erste Glied in der Entwicklung (4.5) liefert damit bei großen Werten von η' für \mathfrak{H}_φ den folgenden Näherungsausdruck: Es ist für $\eta \rightarrow \infty$

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') \sim \frac{4\pi i \cdot U(\xi'_q)}{\lambda_0 \cdot \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{\xi_q \cdot e^{i k (\xi_q + \eta_i)}}{e^{2 k \eta_i} + 2(1 - i k \eta_i) \text{Ei}(2 i k \eta_i)} \cdot \frac{\cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{e^{i k r}}{r} \quad \text{A/cm.} \quad (4.5a)$$

Dabei ist gemäß den Definitionsgleichungen für die parabolischen Koordinaten die Entfernung r zwischen Brennpunkt und Aufpunkt gleich $\xi + \eta$ und $z = \xi - \eta$ gesetzt worden. Überdies ist mit $z = r \cdot \cos \vartheta$ in (4.5a) auch der Polarkwinkel ϑ eingeführt worden. Im Hinblick auf die allgemeine Gültigkeitsbedingung von Gl. (4.5) muß der Winkel ϑ in der letzten Gleichung stets größer als $\pi/2$ sein.

Wir wenden uns nunmehr der zweiten Möglichkeit zu, von Gl. (4.3) oder (4.4) aus zu einer Reihenentwicklung zu gelangen, indem wir gemäß den bei der Gl. (2.10) vorgefundenen Verhältnissen nach Polen rechts vom Integrationsweg Umschau halten. Da auch im vorliegenden Falle die zweireihige Determinante des Integranden für positiv ganzzahlige Werte von s verschwindet, so werden solche Pole, falls sie überhaupt vorhanden sind, gewiß nicht von den Nullstellen von $\sin(\pi s)$ gebildet. Beim Integral der Gl. (4.3) entfällt die Möglichkeit zu solchen Polen von selbst. Es bleibt also nur noch zu prüfen, ob eventuell die Funktion $W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta)$ als Funktion von s betrachtet Nullstellen besitzt. Gemäß Gl. (2.13b) trifft diese Vermutung aber tatsächlich zu. Danach sind auch bei dieser Funktion unendlich viele Nullstellen in bezug auf s vorhanden. Nach Gl. (4.10c) nähern sie sich mit wachsender Ordnungszahl mehr und mehr der positiv reellen Achse der s -Ebene. Bei ihrer wirklichen Berechnung beschränken wir uns im folgenden auf sehr kleine Werte von η .

Im Hinblick auf die Beziehung (3.2) für $W_{s, \frac{1}{2}}(z)$ empfiehlt es sich dabei, von vornherein gleich nach den Nullstellen der Funktion $\Gamma(-s) W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta)$ zu suchen. Dann stört aber noch an der für Gl. (3.2) gewählten Schreibweise, daß für einen Wurzelwert s_p , der etwa in der Nähe der positiven ganzen Zahl p liegt, wegen des Faktors $\Psi(1 + \lambda - s)$ alle Glieder der Reihe mit $\lambda \leq p - 1$ in sehr unübersichtlicher Weise unendlich werden. Ihre Herausnahme wird dadurch ziemlich mühselig. Wir machen aus diesem Grunde von der Beziehung

$$\Psi(1 + \lambda - s) = \Psi(s - \lambda) + \pi \cotg \pi (s - \lambda) = \Psi(s - \lambda) + \pi \cotg(\pi s)$$

Gebrauch und erhalten damit für die Funktion $W_{s, \frac{1}{2}}(z) \cdot \Gamma(-s)$ im Hinblick auf die Gl. (3.1) auch noch die andere Darstellung:

$$\begin{aligned} \Gamma(-s) \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(z) &= z \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot {}_1F_1(1 - s; 2; z) \cdot [\ln z + \pi \cotg \pi s] - \frac{e^{-z/2}}{s} \\ &+ z \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - s + \lambda)}{\Gamma(1 - s) \cdot (\lambda + 1)!} \cdot \left[\Psi(s - \lambda) - 2\Psi(1 + \lambda) - \frac{1}{1 + \lambda} \right] \cdot \frac{z^\lambda}{\lambda!}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nach kurzer, rein elementarer Rechnung folgt daraus die weitere Beziehung:

$$\begin{aligned} \Gamma(-s) \cdot e^{+\frac{z}{2}} \cdot W'_{s, \frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{2s} + {}_1F_1(1 - s; 2; z) + (\ln z + \pi \cotg \pi s) \cdot \\ &\cdot \left[\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot {}_1F_1(1 - s; 2; z) + \frac{(1-s)z}{2} \cdot {}_1F_1(2 - s; 3; z) \right] \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - s + \lambda)}{\Gamma(1 - s) \lambda!} \cdot \left[\Psi(s - \lambda) - 2\Psi(1 + \lambda) - \frac{1}{1 + \lambda} \right] \cdot \frac{z^\lambda}{\lambda!} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\Gamma(-s + \lambda)}{\Gamma(1 - s) (\lambda - 1)!} \cdot \left[\Psi(s + 1 - \lambda) - 2\Psi(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \right] \cdot \frac{z^\lambda}{\lambda!}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Durch die für die beiden letzten Gleichungen gewählte Schreibweise ist damit erreicht, daß die Singularitäten der rechten Gleichungsseite in $s = p$ mit $p = 1, 2, 3 \dots$ nur noch in dem Faktor $\cotg(\pi s)$ stecken, während alle Glieder der beiden unendlichen Reihen an diesen Stellen endlich bleiben.

Wir machen davon Gebrauch, daß voraussetzungsgemäß η_i in $\eta'_i = 2k\eta_i$ eine sehr kleine Zahl sein soll, und vernachlässigen dementsprechend in der Gl. (4.7) alle Glieder mit z, z^2, \dots mit Ausnahme von z^0 und $\ln(z)$. Dann ist näherungsweise mit $C = -\Psi(1) = \ln(\gamma)$

$$\Gamma(-s) \cdot e^{\frac{z}{2}} W'_{s, \frac{1}{2}}(z) \approx \frac{1}{2^s} + \Psi(s) + \pi \cotg(\pi s) + \ln(z\gamma^2). \quad (4.7a)$$

Nach dem Übergang von z zu $-i\eta'_i$ handelt es sich also um die Auflösung der folgenden transzendenten Gleichung nach s :

$$\frac{1}{2^s} + \Psi(1-s) = \frac{1}{2^s} + \Psi(s) + \pi \cotg(\pi s) = \frac{\pi i}{2} + \ln\left(\frac{1}{2k\eta_i\gamma^2}\right). \quad (4.8)$$

Da nun hierin gemäß unserer Voraussetzung der Logarithmus eine große Zahl sein soll, so muß offenbar die kleinste Wurzel s_0 dieser Gleichung in der Nähe von Null liegen, denn bei kleinem s_0 ist $\Psi(1-s_0) \approx \ln(1/\gamma)$ und für die Gl. (4.8) darf dann näherungsweise gesetzt werden:

$$\frac{1}{2^{s_0}} = \frac{\pi i}{2} + \ln\left(\frac{1}{2k\eta_i\gamma^2}\right).$$

Für die kleinste Wurzel s'_0 der Gl. (4.9) kommt mithin der Näherungsausdruck (4.10a) zustande. Um die nächst höheren Wurzeln zu gewinnen, setze man in

$$W'_{s', \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) = 0 \quad (4.9)$$

$$s'_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{\pi i}{2} + \ln\left(\frac{1}{\gamma\eta'_i}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ln^2\left(\frac{1}{\gamma\eta'_i}\right)}. \quad (4.10a)$$

(4.8) $s = s'_p = p + \alpha$ mit $p = 1, 2, 3 \dots$. Betrachtet man dann auch hierin α als eine kleine Zahl, so erhält man für s'_p nach kurzer Rechnung die Formel (4.10b). Diese Gleichung ist jedoch nicht unbeschränkt für beliebig große Werte von p

$$s'_p = p + \frac{-\frac{\pi i}{2} + \left[\ln\left(\frac{1}{\eta'_i\gamma^2}\right) - \left(\frac{1}{2p}\right) - \Psi(p)\right]}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left[\ln\left(\frac{1}{\eta'_i\gamma^2}\right) - \left(\frac{1}{2p}\right) - \Psi(p)\right]^2} \quad (p = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.10b)$$

mit dem gleichen Grade von Genauigkeit gültig. Da nämlich $\Psi(p)$ mit wachsenden Werten von p wie der $\ln(p)$ über alle Grenzen wächst, so trifft in der Gl. (4.8) für große Werte von p nicht mehr die für die oben angewandte Lösungsmethode wesentliche Bedingung zu, daß in dieser Gleichung allein der Logarithmus von $1/(\eta'_i \cdot \gamma^2)$ eine große Zahl vorstellt und mithin tatsächlich α in $s'_p = p + \alpha$ nur klein ist, weil von diesem Logarithmus noch der auch nicht mehr kleine Wert von $\Psi(p)$ in Abzug zu bringen ist, wie das in der Gl. (4.10b) zum Ausdruck kommt. Außerdem ist es natürlich bei großen Werten von p und damit von s selbst bei kleinen Werten von z nicht mehr statthaft, in Gl. (4.7) z. B. das Glied $z \cdot (1-s)/2$ in der Funktion F_1 von Gl. (4.7) fortzulassen. Für große Werte von s muß daher für die

Berechnung der Wurzeln von (4.9) die asymptotische Darstellung der Funktion $W_{s, \frac{1}{2}}$ für große Werte von s durch Gl. (2.13b) herangezogen werden. Aus Raum-mangel müssen wir uns damit begnügen, die auf diesem Wege gewonnenen und für große p gültigen Näherungsausdrücke für die Nullstellen der Gl. (4.9) hier ohne Herleitung mitzuteilen. Es gelten danach für sie die Beziehungen:

$$s'_p = \left(p + \frac{1}{4}\right) \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot e^{i\varphi} \quad (4.10c)$$

mit $\cos \varphi = (\sqrt{1 + A^2} - 1)/A \approx 1 - \frac{1}{A} + O\left(\frac{1}{A^2}\right)$ und $A = \left(p + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\pi^2}{\eta_i^2}$.

Im Grenzfall $p \rightarrow \infty$ gehen also die Wurzeln $s'_p \rightarrow p + 1/4$, da der Hilfswinkel φ hierbei gegen Null strebt. Vernachlässigt man noch in (4.10a) die Glieder $\pi i/2$ und $\pi^2/4$ im Zähler und Nenner des Bruches, so stimmt die Beziehung für s'_0 mit dem von M. Abraham²⁾ angegebenen Wert von ϑ überein.

Nach diesen Untersuchungen tritt mithin auch bei den Integralen (4.2) und (4.4) auf der rechten Seite des Integrationsweges eine Kette von unendlich vielen, einfachen Polen $s = s'_p$ auf. Um dieser Tatsache gemäß diese Integrale nach dem Residuensatz in Reihen umwandeln zu können, denken wir uns den zur imaginären Achse parallelen Integrationsweg durch einen auf seiner rechten Seite angesetzten Halbkreis von sehr großem Radius zu einem geschlossenen Integrationsweg ergänzt. Dann verschwindet der Integrand längs dieses Halbkreises, wie man mittels der z. B. in²⁾ mitgeteilten asymptotischen Darstellungen von $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ für $s \rightarrow \infty$ zeigen kann, immer dann hinlänglich stark, sobald zwischen den ξ' , ξ'_q usw. die Ungleichung (4.11a) erfüllt ist.

Bei Anregung des Strahlungsfeldes durch eine auf der Oberfläche des Drehparabols $\eta = \eta_i$ an der Stelle ξ_q angeordnete zonale EMK berechnet sich auf diese Weise für \mathfrak{H}_φ die folgende Reihenentwicklung: Es ist

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = + \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_q)}{\sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma(1 + s'_p) \cdot \frac{W_{s'_p, \frac{1}{2}}(-i \eta')}{[\partial W_{s'_p, \frac{1}{2}}(-i \eta'_q)/\partial x]_{x=s'_p}} \cdot \begin{cases} \{M_{s'_p, \frac{1}{2}}(i \xi') \cdot W_{-s'_p, \frac{1}{2}}(-i \xi_q)\} & (\xi' < \xi'_q) \\ \{M_{s'_p, \frac{1}{2}}(i \xi'_q) \cdot W_{-s'_p, \frac{1}{2}}(-i \xi')\} & (\xi' > \xi'_q) \end{cases} \quad (4.11)$$

Dabei ist die Umformung des Integrals in die Reihe (4.11) an die Voraussetzung gebunden, daß die Ungleichung

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\xi'_q} > \sqrt{\xi'} \\ \sqrt{\xi'} > \sqrt{\xi'_q} \end{aligned} \right\} + \sqrt{\eta'} - \sqrt{\eta'_q} \quad \begin{aligned} (\xi' < \xi'_q) \\ (\xi' > \xi'_q) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

besteht. Wir haben also in Gl. (4.11) eine an der inneren Begrenzungsfläche des Strahlungsraums gültige Entwicklung vorliegen. Im Gegensatz zu der Reihendarstellung (4.5) für \mathfrak{H}_φ erfüllt in der Gl. (4.11) jedes Reihenglied für sich allein sowohl die Differentialgleichung auch als auch die Randbedingung an der Fläche $\eta = \eta_i$. Jedes Glied für sich repräsentiert demzufolge einen physikalisch möglichen Ausbreitungsmodus der Strahlung.

²⁾ M. Abraham, Elektrische Schwingungen in einem frei endigenden Draht, Ann. Physik (4. Folge) 2, 32–60 (1900).

Erfolgt die Strahlungs-Anregung wie bei Gl. (4.4) durch einen in der Achse liegenden elektrischen Dipol, der an der Stelle $\eta = \eta_0$ steht, so gilt in diesem Falle für Φ_φ die Reihenentwicklung (4.12), deren Gültigkeit an die Voraussetzung $\xi' > 0$ gebunden ist. Im übrigen ändert sie ihre Gestalt nicht, gleichgültig ob nun $\eta \leq \eta_0$ ist.

$$\Phi_\varphi(\xi', \eta') = \frac{k^2 \cdot I^{(e)} \delta_z^e}{\eta_0' \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s_p'}{\sin(\pi s_p')} \cdot \frac{W_{s_p', \frac{1}{2}}(-i \eta_0') \cdot M_{s_p', \frac{1}{2}}(-i \eta_0')}{[\partial W_{s_p', \frac{1}{2}}(-i \eta_0') / \partial x]_{x=s_p'}} \cdot W_{-s_p', \frac{1}{2}}(-i \xi') \cdot W_{s_p', \frac{1}{2}}(-i \eta') \quad (\eta_i \leq \eta < \infty) \quad (4.12)$$

Über einige physikalische Folgerungen, die sich aus den Lösungsgl. (4.11) und (4.12) ziehen lassen, vergleiche man die unter³⁾ zitierte Arbeit von M. Abraham. Die nämlichen Folgerungen bespricht H. M. Macdonald in seinem unter⁴⁾ angeführten Buche, in dem er zum Unterschied gegen Abraham den frei endigenden Draht unter dem Bilde eines spitzen Kegels betrachtet.

4.2. Der freistehende magnetische Stromring in einem aus zwei konfokalen und orthogonalen Drehparabeln begrenzten Raum

In der soeben erwähnten Arbeit von M. Abraham begnügt sich der Verfasser von vornherein mit der Herstellung einer Näherungslösung, wobei er aber methodisch in ganz anderer Weise vorgeht, als es in der vorstehenden Arbeit der Fall ist. Abraham gelangt dabei zu einer einzigen möglichen Ausbreitungsform der Strahlung, nämlich nur zu derjenigen, die in den obigen Reihenentwicklungen der kleinsten Wurzel s_0' entspricht. Andererseits betrachtet jedoch Abraham insofern einen allgemeineren Fall, als in seinen Untersuchungen das Drehparabol, das den frei endigenden Draht darstellt, nur eine endliche Länge hat und am Ende dieser Länge gemäß Abb. 3 in ein zweites sich bis ins Unendliche erstreckende Drehparabol einmündet, das das den Draht verkörpernde orthogonal schneidet. Bedeutet $\xi = \xi_r$ die parabolische Koordinate der inneren Begrenzungsfläche dieses zweiten Paraboloids, so spielen sich die von Abraham untersuchten Schwingungen in dem Raum zwischen dem drahtförmigen Drehparabol mit der Oberfläche $\eta = \eta_i$ und dem dazu senkrechten Parabol mit der

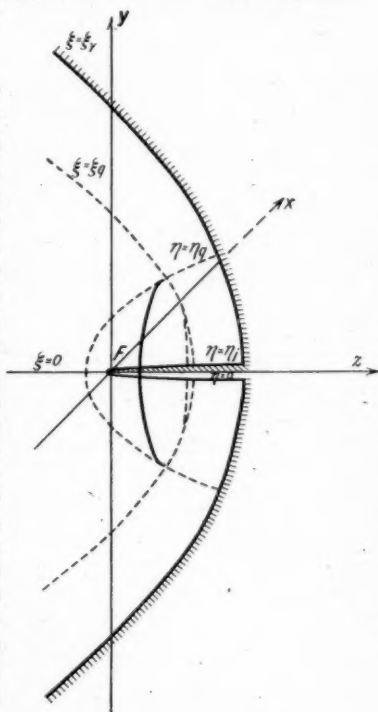


Abb. 3. Der Stromring steht nach wie vor im Schnittpunkt der beiden Drehparabole $\eta = \eta_0$ und $\xi = \xi_0$. Die Begrenzung des Raums wird aber jetzt gebildet von dem Drehparabol $\eta = \eta_i$ und dem dazu konfokalen und orthogonalen Drehparabol $\xi = \xi_r$.

⁴⁾ H. M. Macdonald, Electromagnetism, London 1934.

Oberflächengleichung $\xi = \xi_r$ ab. Selbstverständlich ist dann für alle Punkte (ξ, η) des von der Strahlung erfüllten Raums $0 \leq \xi \leq \xi_r$ und $\eta_i \leq \eta < \infty$. Im besonderen ist auch zunächst $\xi_q < \xi_r$ und $\eta_i < \eta_q$.

Es ist keineswegs schwierig, auch die Lösung (4.4) für den außerhalb des Parabols angeordneten, freistehenden magnetischen Stromring dieser Modifikation anzupassen. Wir brauchen zu diesem Zweck der Gl. (4.2) für \mathfrak{H}_φ nur eine weitere Gleichung hinzuzufügen, die sonst in allen Faktoren den gleichen Aufbau hat wie die Ausgangsgleichung, sich von dieser jedoch darin unterscheidet, daß an Stelle der geschweiften Klammer im Integranden das Glied

$$A(s) \cdot M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi')$$

steht. Physikalisch repräsentiert dieser zweite, zu \mathfrak{H}_φ hinzutretende Ausdruck die Veränderung von \mathfrak{H}_φ durch die reflektierende Wirkung der neu hinzukommenden Oberfläche $\xi = \xi_r$. Da diese reflektierte Strahlung für $\xi = 0$ einen endlichen Wert behalten muß, so scheidet im Hinblick auf die Gl. (3.2b) die Wahl der Funktion $W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi')$ als Ansatz aus. Die Bestimmung der noch unbekannten Funktion A in dem mithin allein möglichen obigen Ansatz gelingt dann ohne weiteres mittels der Forderung, daß an der Fläche $\xi = \xi_r$ für alle η die Feldkomponente \mathfrak{E}_z verschwinden muß.

Die Feldkomponente \mathfrak{H}_φ des Strahlungsfeldes, das ein an der Stelle (ξ_q, η_q) angeordneter, freistehender magnetischer Stromring im Innern eines zu ihm koaxialen Drehparabols $\xi = \xi_r$ mit der gemäß Abb. 3 in das Innere hineinragenden parabolischen Spitze $\eta = \eta_i$ erzeugt, ist demgemäß im

$$\text{Raumteil } \xi_q \leq \xi < \xi_r \text{ und } \eta_q < \eta < \infty$$

durch die nachstehende Integraldarstellung gegeben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_\varphi(\eta', \eta) = & \frac{-2\pi \cdot I_\varphi^{(h)}}{\lambda_0 \cdot \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cdot \sqrt{\xi'} \eta'} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{+\sigma+i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \frac{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q)}{M_{s, \frac{1}{2}}(i\xi'_r)} \cdot \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)} \cdot \\ & \left| \begin{array}{cc} M'_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_r) & M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \\ W'_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_r) & W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \\ M'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \end{array} \right| \cdot ds \\ & 0 < \sigma < \text{Re}(s'_0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die für den Raumteil $0 \leq \xi < \xi_q$ gültige Darstellung geht aus (4.13) durch Vertauschung der Argumente ξ'_q und ξ' unter dem Integralzeichen hervor und die für den Raumteil $\eta_i \leq \eta < \eta_q$ durch Vertauschung der Argumente η_q und η . Die Gl. (4.13) erfüllt nicht nur die für \mathfrak{H}_φ vorgeschriebene Differentialgleichung (2.17). Sie befriedigt auch die Randbedingungen über das Verschwinden von \mathfrak{E}_z auf der Fläche $\eta = \eta_i$ und das von \mathfrak{E}_η auf der Fläche $\xi = \xi_r$, denn die beiden Determinanten in (4.13) bestehen in diesem Falle aus zwei gleichlautenden Spalten.

An dem Integral der Gl. (4.13) ist außerdem bemerkenswert, daß die Singularitäten seines Integranden nur noch von den Nullstellen der Funktionen $M'_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_r) = M'_{s, \frac{1}{2}}(+i\xi'_r)$ und $W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)$ gebildet werden. Die ersteren liegen wie im Falle der Gl. (3.3) auf der imaginären Achse der s -Ebene, jedoch im vorliegenden Falle fast alle auf der negativen Hälfte dieser Achse, die zweiten liegen nach Abschnitt 4.2 in der Halbebene der $\text{Re}(s) > 0$, wo sie sich mit zunehmender Ordnungszahl asymptotisch der reellen Achse nähern. Die Nullstellen von $\sin(\pi s)$ bilden in (4.13) weder in der rechten noch in der linken Halbebene Pole des

Integranden, denn für ein $s = \pm (n + 1)$ mit $n = 0, 1, 2 \dots$ verschwindet gemäß der Gl. (2.11) wegen der Gleichheit zweier Zeilen entweder die linke oder die rechte Determinante. Soll daher das Integral (2.13) nicht einfach gleich Null sein, so muß im vorliegenden Falle sein Integrationsweg rechts von der imaginären Achse der s -Ebene verlaufen und sich zwischen der senkrechten Polkette auf der imaginären Achse dieser Ebene und der wesentlich horizontalen Polkette von seiten der Funktion $W'_{s, \frac{1}{2}}$ hindurch ziehen. Das Integral (4.13) konvergiert im übrigen unter den angegebenen Größenungleichungen für die ξ' und η' absolut und gleichmäßig.

Entsprechend den beiden Polketten des Integranden von (4.13) lassen sich im vorliegenden Falle durch Herumlegen des Integrationsweges nach rechts oder links zwei völlig verschiedene Reihenentwicklungen aufstellen. An diesen Reihen ist bemerkenswert, daß jedes ihrer Glieder beide Randbedingungen zugleich erfüllt. Handelt es sich z. B. um die Reihenentwicklung nach den Nullstellen der Funktion $M'_{s, \frac{1}{2}}$, so wird die Randbedingung längs $\xi = \xi_r$ befriedigt, weil dabei eine Eigenfunktion ins Spiel kommt, und die Randbedingung für \mathfrak{E}_ξ längs $\eta = \eta_i$, weil jedes Glied mit einem Faktor behaftet ist, der für $\eta = \eta_i$ verschwindet. Der umgekehrte Fall liegt bei der anderen Entwicklung vor.

Es versteht sich von selbst, daß auch die Lösungsgl. (4.13) auf die in den früheren Abschnitten behandelten besonderen Anregungsformen spezialisiert werden kann. Als eine physikalisch besonders interessante Form der Strahlungserzeugung erwähnen wir darunter diejenige, bei der die Anregung durch eine zonale EMK erfolgt, die in der Schnittkurve der beiden Parabolflächen $\xi = \xi_r$ und $\eta = \eta_i$ liegt. Die Gleichung für \mathfrak{E}_φ nimmt in diesem Falle im Hinblick auf die Gl. (3.4) die einfache Gestalt der Gl. (4.13a) an. Unter praktischen Verhältnissen würde diese

$$\mathfrak{E}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{2\pi}{\lambda_0 \cdot \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_r)}{\sqrt{\xi'_r \eta'}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi')}{M'_{s, \frac{1}{2}}(i\xi'_r)} \cdot \frac{W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W'_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)} \cdot ds \quad (0 < \sigma < \operatorname{Re}(s'_0)) \quad (4.13a)$$

$$(\eta \geq \eta_i, \xi \leq \xi_r)$$

Art der Anregung dadurch verwirklicht werden können, daß von außen her in die Kappe des Parabols $\xi = \xi_r$ und konzentrisch zu dessen Rotationsachse eine koaxiale Leitung eingeführt wird, deren Mittelleiter im Innern dieses Parabols in die zweite Parabolfläche $\eta = \eta_i$ ausläuft. Die zonale EMK wird hierbei dargestellt durch das elektrische Feld in dem kreisringförmigen Endquerschnitt der koaxialen Leitung.

Als Musterbeispiel für die anderen Fälle geben wir noch die zur Integraldarstellung (4.13a) gehörigen Reihenentwicklungen an. Wir legen zunächst den Integrationsweg nach links herum, so daß er die im wesentlichen auf der negativ imaginären Achse gelegenen Pole umschlingt. Das ist immer statthaft, solange $\eta > \eta_i$ und $\xi_r > \xi$ ist und führt zu der absolut und gleichmäßig konvergenten Reihenentwicklung (4.14a), in der die τ'_n die Gl. (4.14a) erfüllen. Daß auch in diesem Falle die Grenzbedingung $\mathfrak{E}_\xi = 0$ auf $\eta = \eta_i$ befriedigt ist, läßt

$$\mathfrak{E}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{2\pi i}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_r)}{\sqrt{\xi'_r \eta'}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(i\xi')}{[\partial M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(i\xi'_r)/\partial x]_{x=\tau'_n}} \cdot \frac{W_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{W'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i)} \quad (0 \leq \xi < \xi_r) \quad (4.14a)$$

$$(\eta > \eta_i)$$

$$M'_{i\tau'_n, \frac{1}{2}}(i\xi'_r) = 0 \quad (4.14a)$$

sich zwar der Reihe selbst nicht ohne weiteres ansehen. Es folgt dies aber zwangsläufig aus der Integraldarstellung (4.13a), denn für ein $\eta = \eta_i$ fällt dann unter dem Integralzeichen auch noch der Quotient aus den beiden W -Funktionen fort und für ein $\xi < \xi_r$ kann zum mindesten für ein $\text{Im}(k) > 0$ der Integrationsweg beliebig weit nach rechts verschoben werden, ohne je auf eine Singularität zu stoßen oder die Konvergenz zu verlieren, so daß also das Integral identisch verschwindet. Für jedes $\xi' < \xi_r'$ muß daher die Nullentwicklung (4.15) gelten.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M'_{s'_n, \frac{1}{2}}(i\xi')}{[\partial M'_{s'_n, \frac{1}{2}}(i\xi')/\partial x]_{x=s'_n}} = 0. \quad (4.15)$$

Besteht zwischen den ξ , ξ_r usw. die zu Gl. (4.16) angegebene Ungleichung, so darf in (4.14a) der Integrationsweg nach rechts herumgelegt werden und auf die dort liegenden Pole zusammengezogen werden, die von den Nullstellen der Funktion $W'_{s, \frac{1}{2}}$ herrühren. Es ergibt sich so die Entwicklung (4.16). Sie hat in erster Linie in

$$\mathfrak{H}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \frac{U(\xi'_q)}{\sqrt{\xi'_q \eta'_q}} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{M'_{s_p, \frac{1}{2}}(i\xi')}{M'_{s_p, \frac{1}{2}}(i\xi'_r)} \cdot \frac{W'_{s_p, \frac{1}{2}}(-i\eta')}{[\partial W'_{s_p, \frac{1}{2}}(-i\eta')/\partial x]_{x=s'_p}} \quad (4.16)$$

$$\sqrt{\xi_r} > \sqrt{\xi} + \sqrt{\eta} - \sqrt{\eta_i}$$

dem Bereich um das innere Parabol herum Geltung und gilt überhaupt nicht an der Oberfläche des dazu orthogonalen äußeren Drehparabols.

5. Die allgemeine Lösungsgleichung für den elektrischen Stromring zwischen zwei Drehparabolen

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch in aller Kürze auf den Fall eingehen, daß das axialsymmetrische Strahlungsfeld zwischen den beiden Drehparabolen $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_a$ seine Herkunft einem elektrischen Stromring verdankt, der an der Stelle (ξ_q, η_q) koaxial zur Rotationsachse angeordnet ist. Aus demselben Grunde wie im Abschnitt 2 hat dann der Vektor $\mathfrak{Q}^{(e)}$ von Gl. (2.3), mit dessen Hilfe sich das primäre Strahlungsfeld eines solchen Ringes beschreiben läßt, wegen

$$\mathfrak{Q}^{(e)}(x', y', z') \cdot dV' = \mathfrak{Q}^{(e)} dx' dy' dz' = I_\varphi^{(e)} \cdot \varrho_q \cdot d\varphi_q \cdot c\varphi_q \quad [I_\varphi^{(e)}] = A$$

nur die einzige, durch Gl. (5.1) wiedergegebene Komponente $\mathfrak{Q}_\varphi^{(e)}$, und das Feld selbst hängt mit $\mathfrak{Q}_\varphi^{(e)}$ über die Gl. (5.2a, b, c) zusammen. Für die Komponente $\mathfrak{E}_\varphi^{(p)}$ des primären Feldes gilt dann ganz die nämliche Gl. (2.7) wie für $\mathfrak{H}_p^{(p)}$ mit

$$\mathfrak{Q}_\varphi^{(e)} = + \frac{I_\varphi^{(e)} \cdot \varrho_q}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cos(\varphi - \varphi_q) \cdot d\varphi_q \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = + i \omega \mu_0 \cdot \mathfrak{Q}_\varphi^{(e)} \quad (5.2a)$$

$$i \omega \mu_0 \mathfrak{H}_\xi = \frac{1}{2\sqrt{\xi(\xi + \eta)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (2\sqrt{\xi \eta} \cdot \mathfrak{E}_\varphi) \quad (5.2b)$$

$$i \omega \mu_0 \mathfrak{H}_\eta = - \frac{1}{2\sqrt{\eta(\xi + \eta)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (2\sqrt{\xi \eta} \cdot \mathfrak{E}_\varphi) \quad (5.2c)$$

dem einzigen geringfügigen Unterschied, daß in dem Ausdruck für $\mathfrak{E}_\varphi^{(p)}$ der Faktor $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ in den Zähler zu stehen kommt und daselbst an Stelle von $I_\varphi^{(A)}$ die Amplitudenkonstante $I_\varphi^{(e)}$ auftritt. Dieselben Änderungen muß der der Gl. (2.9) entsprechende Ansatz für das zusätzliche Feld $A\mathfrak{E}_\varphi$ zeigen. Die darin vorkommenden Funktionen $A(s)$ und $B(s)$ bestimmen sich dann neuerdings aus der Forderung, daß für das resultierende Feld die Feldkomponente $\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{E}_\varphi^{(p)} + A\mathfrak{E}_\varphi$ sowohl für $\eta = \eta_i$ als auch für $\eta = \eta_a$ verschwinden muß. Daraus ergibt sich dann nach kurzer Rechnung für die Komponente \mathfrak{E}_φ des Strahlungsfeldes, das ein an der Stelle (ξ_a, η_a) stehender elektrischer Stromring in dem Raum zwischen den beiden Drehparabolen $\eta = \eta_i$ und $\eta = \eta_a$ erzeugt, der folgende Ausdruck: Es ist im Falle eines $\eta_a < \eta < \eta_i$

$$\mathfrak{E}_\varphi(\xi', \eta') = \frac{2\pi \cdot I_\varphi^{(e)}}{\lambda_0 \sqrt{\xi' \eta'}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \cdot \begin{cases} M_{s, \frac{1}{2}}(i\xi') \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi'_q) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(i\xi'_q) \cdot W_{-s, \frac{1}{2}}(-i\xi') \end{cases} \quad (\xi' < \xi'_q)$$

$$\quad (\xi' > \xi'_q)$$

$$\begin{vmatrix} W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \\ W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \end{vmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_a) \\ M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) & W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_i) \end{matrix} \right\}^{-1} \cdot ds \quad \text{V/cm.} \quad (5.3)$$

Für ein $\eta_i > \eta < \eta_a$ steht in der dreireihigen Determinante in der linken oberen Ecke an Stelle von

$$W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q) \text{ das Element } M_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta') \cdot W_{s, \frac{1}{2}}(-i\eta'_q).$$

Die weiteren sich hieran anschließenden Rechnungen können methodisch in derselben Weise durchgeführt werden wie in den Abschnitten 2.4. Auch das, was früher über die Lage der Singularitäten gesagt worden ist, bleibt qualitativ bestehen. Nur ändern sich natürlich, da neuerdings in der Nennerdeterminante die Funktionen $M_{s, \frac{1}{2}}$ und $W_{s, \frac{1}{2}}$ selbst auftreten und nicht mehr wie früher ihre Ableitungen, die quantitativen Angaben über die Nullstellen. Schließlich verdient noch bemerkt zu werden, daß im vorliegenden Falle das Hineinrücken des Stromringes in die innere oder äußere Begrenzungsfläche zu einem trivialen Ergebnis führt, da die maßgebenden Determinanten hierbei in der Grenze verschwinden. Das entspricht dem physikalischen Sachverhalt.

6. Schlußbemerkungen

Mit den Verallgemeinerungen, die in der vorliegenden Arbeit hinsichtlich der Art der Anregung und der Formgebung des Raums gegenüber der älteren Arbeit vorgenommen worden sind, sind die Untersuchungen über das azialsymmetrische, elektromagnetische Strahlungsfeld unter Berücksichtigung der Erzeugung in einem von Paraboloiden begrenzten Raum im großen und ganzen zum Abschluß gebracht. Wenn dabei hier nur von dem magnetischen und elektrischen Stromring als der azialsymmetrischen Strahlungsquelle die Rede gewesen ist, so geschah dies aus dem guten Grunde, weil sich alle anderen derartigen Anregungsformen auf die hier ausgewählten als Grundformen zurückführen lassen.

Wird z. B. das quasi-axialsymmetrische Feld von einer Vielzahl elektrischer Dipole erzeugt, die symmetrisch zur Achse der Drehparabole in den Ecken eines regelmäßigen Polygons angeordnet sind, und die im übrigen die Richtung der Rotationsachse haben, so läßt sich in diesem Fall die Lösungsgleichung für \mathfrak{H}_φ dadurch aus der allgemeinen Lösung (2.10) gewinnen, daß man statt eines magnetischen Stromringes deren zwei betrachtet, die bei nur wenig voneinander verschiedenen Radien ϱ_a und $\varrho_a - \delta\varrho_a$ in einer und derselben zur Rotationsachse senkrechten Ebene liegen, jedoch von dem magnetischen Strom in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden. Steht dann der Ring mit dem Radius ϱ_a wie früher an der Stelle (ξ_a, η_a) , so steht der zweite Ring wegen

$$\delta z_a = \delta \xi_a - \delta \eta_a = 0$$

$$\delta \varrho_a = \delta \left(2 \sqrt{\xi_a \eta_a} \right) = \left(\frac{\eta_a}{\xi_a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \delta \xi_a + \left(\frac{\xi_a}{\eta_a} \right)^{\frac{1}{2}} \delta \eta_a = \frac{\xi_a + \eta_a}{\sqrt{\xi_a \cdot \eta_a}} \left\{ \delta \xi_a \right\}$$

an der Stelle

$$\xi_a - \frac{\sqrt{\xi_a \cdot \eta_a}}{\xi_a + \eta_p} \cdot \delta \varrho_a, \quad \eta_a - \frac{\sqrt{\xi_a \cdot \eta_p}}{\xi_a + \eta_a} \cdot \delta \varrho_a.$$

Entwickelt man nun in dem zum zweiten Stromring gehörigen Ausdruck für \mathfrak{H}_φ die Funktionen mit den Argumenten ξ'_a und η'_a in Reihen nach $\delta \varrho_a$ und bricht sie wegen dessen Kleinheit mit der ersten Potenz von $\delta \varrho_a$ ab, so hebt sich der zum ersten Stromring gehörige Ausdruck für \mathfrak{H}_φ gegen das erste Entwicklungsglied fort, und in dem stehenbleibenden Ausdruck erscheint vor dem Integralzeichen u. a. das Produkt $I_\varphi^{(h)} \cdot \delta \varrho_a$. Bedeutet andererseits $\mathfrak{Z}_z^{(e)} \cdot \delta \zeta$ die gegebene Dichte der elektrischen Dipolmomente, bezogen auf den cm-Umfang des Kreises mit dem Radius ϱ_a , so ist auf Grund von Gl. (3.6):

$$I_\varphi^{(h)} \cdot \delta F \equiv I_\varphi^{(h)} \cdot (1 \cdot \delta \varrho_a) = \frac{\lambda_0}{2\pi i} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \mathfrak{Z}_z^{(e)} \delta \zeta.$$

Damit ist bereits die Umrechnung der Lösungsgleichung auf die neue Art der Anregung des Strahlungsfeldes im wesentlichen vollzogen. Noch einfacher gestalten sich diese Rechnungen, wenn die einzelnen Dipole in den Ecken des Polygons zur Achse senkrecht stehen oder die Richtung der Tangente an die Parabelflächen $\xi = \text{const}$ oder $\eta = \text{const}$ haben. Dann muß man zwei Stromringe benutzen, die auf dem dazu senkrechten, durch den Dipolkranz gehenden Parabol liegen. In genau der gleichen Weise ließe sich der Fall eines Ringes magnetischer Dipole axialer Richtung mit der Momentendichte $\mathfrak{Z}_z^{(h)} \delta \zeta$, falls er von praktischer Bedeutung wäre, unter Benutzung der Formel (6.2)

$$I_\varphi^{(e)} \delta F \equiv I_\varphi^{(e)} (1 \cdot \delta \varrho_a) = - \frac{\lambda_0}{2\pi i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \mathfrak{Z}_z^{(h)} \delta \zeta$$

auf die für den elektrischen Stromring der Stärke $I_\varphi^{(e)}$ angegebenen Lösung zurückführen.

Braunschweig, Saarbrückener Straße 269.

(Bei der Redaktion eingegangen am 13. Juni 1946.)

Über die Totalreflexion von ebenen Impulswellen

Von F. A. Fischer

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird die Verformung einer ebenen Impulsquelle untersucht, die im Falle der Totalreflexion dadurch zustande kommt, daß die einzelnen Spektralkomponenten des Impulses bei der Reflexion eine frequenzunabhängige Phasenverschiebung erhalten. Die Berechnung eines totalreflektierten Einheitsimpulses (Diracsche δ -Funktion) und der dabei im zweiten Medium auftretenden Erregung wird an einem Beispiel auch zahlenmäßig durchgeführt.

Das Problem der Totalreflexion ebener kontinuierlicher Sinuswellen ist in der Optik und Akustik theoretisch und experimentell eingehend behandelt. Es tritt dabei die bemerkenswerte Erscheinung auf, daß, obwohl die Energie total reflektiert wird, das zweite Medium doch eine Welle führt. Diese läuft der Grenzschicht parallel und ist quer zu ihrer Fortpflanzungsrichtung gedämpft. Diese Dämpfung ist aber ein rein wattloser Vorgang. Sie kommt dadurch zustande, daß die Energie von dem zweiten Medium kontinuierlich zurückgeworfen wird. Es tritt so ein gewisser Energiebetrag periodisch in das zweite Medium ein und aus. Im zeitlichen Mittel wird aber keine Energie aufgenommen.

In der folgenden Arbeit soll untersucht werden, wie sich diese Erscheinung auf die Reflexion von Impulsen mit ebener Wellenfront auswirkt. Aus der Tatsache, daß sich ein Impuls durch ein Fouriersches Integral darstellen läßt, folgt auf Grund des Superpositionsprinzips sofort, daß auch bei Impulsen keine Energie in das zweite Medium übertragen werden kann. Jede seiner spektralen Komponenten wird total reflektiert und erzeugt im zweiten Medium eine quer gedämpfte Grenzschichtwelle.

Setzt man beide Medien als frei von Dämpfungswiderständen voraus, so sind die Reflexionsvorgänge nicht frequenzabhängig. Im Falle der normalen Reflexion setzen sich daher die reflektierten Spektralkomponenten zu einem Impuls von der gleichen Form und der gleichen Intensität wie der einfallende zusammen. Im Falle der Totalreflexion ist dies aber nicht mehr der Fall. Es tritt vielmehr eine starke Verzerrung des reflektierten Impulses auf. Dies hat darin seinen Grund, daß dann die einzelnen Spektralkomponenten eine frequenzunabhängige Phasenverschiebung erhalten.

Es bleibt noch die interessante Frage, zu was sich im Falle der Totalreflexion die Spektralkomponenten im zweiten Medium zusammensetzen. Unsere Rechnung wird zeigen, daß auch im zweiten Medium ein Impuls auftritt, und zwar ebenfalls von einer von dem einfallenden Impuls völlig verschiedenen Gestalt.

Bevor wir mit dem eigentlichen Problem beginnen, sollen die bekannten Beziehungen für die Reflexion kontinuierlicher Sinuswellen noch einmal kurz zusammengestellt werden. Wir wählen dabei als ein möglichst einfaches Beispiel die longitudinalen ebenen elastischen Wellen kleiner Amplitude in Flüssigkeiten oder Gasen (Schallwellen). Die Übertragung auf polarisierte transversale (elektromagnetische) Wellen bringt nichts prinzipiell Neues.

Für ebene Schallwellen gelten bekanntlich die folgenden Grundgleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1)$$

die aus der Bewegungsgleichung folgt, und

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{E} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2)$$

die aus der Kontinuitätsgleichung in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz abgeleitet wird.

Hierin bedeutet

p den Druck

v die Geschwindigkeit eines Mediumteilchens (Schallschnelle)

ρ die Dichte

E die Elastizitätskonstante

ξ die räumliche Koordinate in der Fortpflanzungsrichtung

und t die Zeit.

Für Flüssigkeiten ist E gleich dem reziproken Kompressibilitätskoeffizienten κ , während für Gase

$$E = \gamma P_0 \quad \text{ist.}$$

Darin ist P_0 der Gleichdruck des Gases und γ das in der Adiabatangleichung auftretende Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen.

Wir wollen die kontinuierlichen Wellen in einer Form hinschreiben, die für die spätere Verwendung in Fourierschen Integralen besonders geeignet ist, indem wir nämlich statt der meist üblichen komplexen Darstellung

$$\cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} e^{i(\omega t + \alpha)}$$

die folgende Zerlegung in zwei konjugierte komplexe Größen benutzen:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2} e^{i\alpha} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\alpha} e^{-i\omega t}.$$

Damit lautet unser Ansatz für die (reellen) Momentanwerte des Druckes der einfallenden, reflektierten und durchgelassenen Welle

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{\mathfrak{P}_e}{2} e^{i\omega \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)} + \frac{\mathfrak{P}_e^*}{2} e^{-i\omega \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)} \\ p_r &= \frac{\mathfrak{P}_r}{2} e^{i\omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} + \frac{\mathfrak{P}_r^*}{2} e^{-i\omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} \\ p_d &= \frac{\mathfrak{P}_d}{2} e^{i\omega \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_1} \right)} + \frac{\mathfrak{P}_d^*}{2} e^{-i\omega \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_1} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hierbei beziehen sich die Indices 1 und 2 auf das erste und zweite Medium (Abb. 1). c_v sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und ω die Kreisfrequenz.

Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel sind mit φ , ψ und χ , konjugierte Größen mit einem Stern bezeichnet. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist vor jedem Glied der rechten Seiten eingeführt, damit der Maximalwert von p_r durch $|\mathfrak{P}_r|$ dargestellt ist.

Entsprechende Ausdrücke sind für die Geschwindigkeiten anzusetzen. Wir brauchen sie aber nicht hinzuschreiben, da bei einer ebenen Welle Druck und Geschwindigkeit in der einfachen Beziehung

$$p = v \cdot \mu$$

zueinander stehen. Hierin ist

$$\mu = \sqrt{\varrho E} = c \cdot \varrho$$

der Schallwellenwiderstand.

An der Grenze $x = 0$ müssen zu allen Zeiten die Drucke und die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten in den beiden Medien einander gleich sein. Dies ergibt die beiden Bedingungsgleichungen

$$(p_e)_{x=0} + (p_r)_{x=0} = (p_d)_{x=0}$$

und

$$\left(\frac{p_e}{\mu_1}\right)_{x=0} \cdot \cos \varphi - \left(\frac{p_r}{\mu_1}\right)_{x=0} \cdot \cos \psi = \left(\frac{p_d}{\mu_2}\right)_{x=0} \cdot \cos \chi.$$

Geht man in diese Gleichungen mit unserem Ansatz (3) ein, so sieht man, daß sie nur dann für jeden Wert von t und y erfüllt sein können, wenn

$$\sin \varphi = \sin \psi$$

und

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{c_1}{c_2} = n \quad (\text{Brechungsindex}).$$

Die erste Formel stellt das Reflexionsgesetz und die zweite das Brechungsgesetz dar.

Für die komplexen Amplituden ergeben sich dann die folgenden Beziehungen

$$\mathfrak{P}_r = P_e \frac{r - \frac{\cos \chi}{\cos \varphi}}{r + \frac{\cos \chi}{\cos \varphi}} \quad (4)$$

und

$$\mathfrak{P}_d = P_e \frac{2r}{r + \frac{\cos \chi}{\cos \varphi}}. \quad (5)$$

Wir haben dabei die Amplitude \mathfrak{P}_e der einfallenden Welle reell angenommen, was nur auf eine belanglose Normierung der Phase der einfallenden Welle hinausläuft und haben den Reflexionsfaktor

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = r$$

gesetzt.

Für $\cos \chi$ ergibt sich nach dem Brechungsgesetz

$$\cos \chi = + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}}.$$

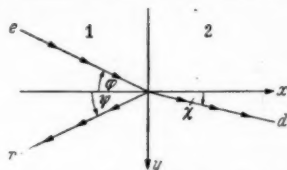


Abb. 1. Zur Reflexion an der Grenze zweier Medien 1 und 2

Das positive Vorzeichen vor der an sich doppeldeutigen Quadratwurzel ergibt sich aus der Geometrie des Vorganges (Abb. 1).

Diese Formel liefert nur dann reelle Werte, wenn

$$\sin \varphi < n$$

ist. Nur für die dieser Bedingung genügenden Einfallswinkel tritt in das zweite Medium eine gebrochene ebene Welle ein. \mathfrak{P}_r und \mathfrak{P}_d sind dann beide reell.

Die Leistungsbilanz für ein Quadratzentimeter der Grenzfläche lautet

$$\frac{P_e^2}{\mu_1} \cos \varphi - \frac{P_r^2}{\mu_1} \cos \varphi = \frac{P_d^2}{\mu_2} \cos \chi. \quad (6)$$

Setzt man hierin die Werte nach (3) unter Berücksichtigung der Reflexions- und Brechungsgesetze ein, so ergibt sich nach Division durch den gemeinsamen Zeitfaktor

$$\frac{P_e^2}{\mu_1} \cos \varphi - \frac{P_r^2}{\mu_1} \cos \varphi = \frac{P_d^2}{\mu_2} \cos \chi.$$

Diese Gleichung wird tatsächlich durch die Werte (4) und (5) identisch erfüllt.

Ist $\sin \varphi > n$, so erhält man keinen reellen Brechungswinkel. $\cos \chi$ wird imaginär. Man schreibt dann zweckmäßig

$$\cos \chi = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1}.$$

Über das Vorzeichen entscheidet jetzt nicht mehr die Geometrie, sondern die Grenzbedingung im Unendlichen. Nur das Minuszeichen liefert für p_d bei unendlich großem x endliche Werte. Es ist also zu setzen

$$\cos \chi = -i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1}$$

oder, wenn man abkürzend

$$+ \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1} = W.$$

setzt,

$$\cos \chi = -iW.$$

Damit ergibt sich für p_d eine quer zu ihrer Fortpflanzungsrichtung (y) gedämpfte Welle von der Form

$$p_d = \frac{P_e}{2} \left(\frac{2r}{r - i \frac{W}{\cos \varphi}} e^{-\omega x \frac{W}{c_2}} e^{i\omega \left(t - \frac{y \sin \chi}{c_2}\right)} + \frac{2r}{r + i \frac{W}{\cos \varphi}} e^{-\omega x \frac{W}{c_2}} e^{-i\omega \left(t - \frac{y \sin \chi}{c_2}\right)} \right)$$

oder

$$p_d = P_e A \cdot e^{-\omega x \frac{W}{c_2}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{y \sin \varphi}{c_1} \right) + \alpha \right], \quad (7)$$

wenn man den Durchlaßfaktor

$$\frac{2r}{r - i \frac{W}{\cos \varphi}} = A e^{i\alpha}$$

setzt.

Die Eindringtiefe x_e , in der die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ gesunken ist, ergibt sich hiernach zu

$$x_e = \frac{\lambda_2}{2\pi W},$$

wenn λ_2 die Wellenlänge im zweiten Medium ist.

Die Erregung im zweiten Medium pflanzt sich also mit der Geschwindigkeit der Spur der einfallenden Welle längs der Grenzschicht fort und ist quer zu dieser Fortpflanzungsrichtung gedämpft.

Will man aus dieser Druckverteilung die Geschwindigkeit ausrechnen, so darf man natürlich nicht die Grundgleichung (1) benutzen, da diese nur für homogene ebene Wellen gilt. Dies hat hier vielmehr nach der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \text{ grad } p$$

zu geschehen.

In dem durch nichts physikalisch ausgezeichneten Koordinatenursprung geht zur Zeit t durch ein cm^2 die Leistung

$$p_e v_e = \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{P_e^2}{4} e^{2i\omega t} + \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{P_e^2}{2} + \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{P_e^2}{4} e^{-2i\omega t}.$$

Die entsprechende reflektierte Leistung ist

$$p_r v_r = \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{\mathfrak{P}_r^2}{4} e^{2i\omega t} + \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{\mathfrak{P}_r \mathfrak{P}_r^*}{2} + \frac{\cos \varphi}{\mu_1} \frac{\mathfrak{P}_r^{*2}}{4} e^{-2i\omega t}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{P}_r \mathfrak{P}_r^* = P_e^2.$$

Subtrahiert man daher die reflektierte von der einfallenden Leistung, so ergibt sich

$$p_e v_e - p_r v_r = \frac{\cos \varphi}{4\mu_1} [(P_e^2 - \mathfrak{P}_r^2) e^{2i\omega t} + (P_e^2 - \mathfrak{P}_r^{*2}) e^{-2i\omega t}].$$

Es findet also im zeitlichen Mittel keine Energieübertragung an das zweite Medium statt. Die Energie wird im Mittel vollkommen reflektiert. Trotzdem findet aber ein periodisches Herein- und Herausfluten eines Energiebetrages von der Größe

$$\frac{\cos \varphi}{4\mu_1} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [(P_e^2 - \mathfrak{P}_r^2) e^{2i\omega t} + (P_e^2 - \mathfrak{P}_r^{*2}) e^{-2i\omega t}] dt$$

statt. —

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Thema, indem wir für den zeitlichen Verlauf von p_e einen Impuls annehmen. Es genügt, wenn wir uns auf die Betrachtung des durch die Diracsche δ -Funktion definierten Einheitsimpulses beschränken, da jeder beliebig geformte Impuls gemäß der Gleichung

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(t - \xi) d\xi$$

aus derartigen Einheitsimpulsen aufgebaut werden kann.

Die δ -Funktion wird bekanntlich ¹⁾ folgendermaßen definiert:

Es ist

$$\delta(t - \xi) = 0 \text{ für alle } t \neq \xi,$$

während für $t = \xi$ $\delta = \infty$ wird, aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \xi) dt = 1$$

ist.

Es hat sich in der Literatur ²⁾ eingebürgert, den durch die δ -Funktion definierten Kraftverlauf (also nicht sein zeitliches Integral) als Einheitsimpuls zu bezeichnen, weil er, wie oben gezeigt, als Aufbauelement für beliebig geformte Kraftverläufe dienen kann. Man hätte aber vielleicht besser ein anderes Wort hierfür nehmen sollen, da nach der in der Mechanik gebräuchlichen Definition des Impulses jedes zeitliche Integral, und zwar über einen beliebigen Kraftverlauf, das den Wert 1 besitzt, den Namen Einheitsimpuls verdient.

Für die δ -Funktion gilt bekanntlich folgende spektrale Darstellung

$$\delta(t - \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\xi)} d\nu = 2 \int_0^{\infty} \cos \omega(t - \xi) d\nu. \quad (8)$$

Zu dieser Formel kann man auf verschiedene Weise kommen, z. B. indem man die δ -Funktion als Differentialquotienten der Dirichletschen Sprungfunktion

$$\sigma(t - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{q(t-\xi)}}{q} dq \quad (a > 0) \quad (9)$$

auffaßt und darin $a \rightarrow 0$ gehen läßt oder als Grenzfall der Gaußschen Fehlerkurve, indem man setzt

$$\delta(t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2(t-\xi)^2}.$$

Die Fourierentwicklung der letztgenannten Formel ergibt

$$\delta(t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k^2}} e^{i\omega(t-\xi)} d\nu. \quad (10)$$

Wenn wir also Formel (8) hinschreiben, so meinen wir, streng genommen, immer irgendeinen derartigen Grenzwert.

Während in Formel (9) eine Konvergenzabszisse eingeführt ist, tritt in Formel (10) ein konvergenzerzeugender Faktor auf.

Auch irgendein anderer konvergenzerzeugender Faktor führt zum Ziel, z. B. kann man auch setzen

$$\delta(t - \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|\omega|} e^{i\omega(t-\xi)} d\nu.$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**, 626 (1926).

²⁾ George A. Campbell, The Bell System Techn. Journ. VII, **1928**, 639—707.

Das hier auftretende Integral läßt sich, nachdem man es in zwei Teile $\int_{-\infty}^0$ und \int_0^{∞} zerlegt hat, ganz elementar lösen und führt auf die Formel

$$\delta(t - \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (t - \xi)^2} \quad (11)$$

durch die die δ -Funktion als Grenzfall einer rationalen Funktion dargestellt wird. Diese Form soll hier benutzt werden.

Wir wollen aber den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht bereits im Ansatz machen, sondern mit endlichem ε rechnen und erst in den Resultaten zur Grenze übergehen.

Machen wir in diesem Sinne den Ansatz

$$p_e = \frac{P_e}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega + i \omega \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu + \frac{P_e}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu$$

$$p_r = \frac{P_r}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega + i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu + \frac{P_r^*}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu$$

$$p_d = \frac{P_d}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega + i \omega \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_2} \right)} d\nu + \frac{P_d^*}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - i \omega \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_2} \right)} d\nu,$$

so betrachten wir also alle glockenförmigen Impulse, die durch die Formel

$$p_e = \frac{P_e}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |\omega| + i \omega \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu = \frac{P_e}{2} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right)^2}$$

dargestellt werden.

Aus dem obigen Ansatz sieht man sofort folgendes:

Da für den Fall der normalen Reflexion sämtliche Amplituden und Winkel reell sind, wird

$$p_r = \frac{P_r}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |\omega| + i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\nu = \frac{P_r}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)^2} \quad (12)$$

oder in der Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$

$$p_r = \frac{P_r}{2} \delta \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right), \quad (12a)$$

ebenso

$$p_d = \frac{P_d}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |\omega| + i \omega \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_2} \right)} d\nu = \frac{P_d}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_2} \right)^2} \quad (13)$$

oder in der Grenze

$$p_d = \frac{P_d}{2} \delta \left(t - \frac{x \cos \chi + y \sin \chi}{c_2} \right). \quad (13a)$$

Es wird sowohl ein mit dem einfallenden formgleicher Impuls reflektiert, als auch ein solcher durchgelassen. Ihre relativen Amplituden berechnen sich nach den Formeln (4) und (5).

Da nun hiernach

$$P_e + P_r = P_d,$$

so ist auch, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (t - \tau)^2} dt = \left[\arctg \frac{t - \tau}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_e dt + \int_{-\infty}^{+\infty} p_r dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_d dt.$$

Wir wollen diese Beziehung „Impulsbilanz“ nennen. Es ist darauf zu achten, daß hier, im Gegensatz zur Leistungsbilanz, vor der reflektierten Größe kein Minuszeichen steht. Sie lautet daher in Worten: Die Summen der rechts- und linksseitigen Impulswerte sind einander gleich. Dabei ist es gleichgültig, an welchen Orten in den einzelnen Medien die Drucke gemessen werden.

Im Falle der Totalreflexion liefern die Formeln (4) und (5) komplexe Werte.

Setzt man

$$\mathfrak{P}_r = P_e \frac{r + i \frac{W}{\cos \varphi}}{r - i \frac{W}{\cos \varphi}} = P_e \cdot (a + ib),$$

so wird

$$\frac{p_r}{P_e} = \frac{a + ib}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega + i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\omega + \frac{a - ib}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - i \omega \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon \omega + i \omega ()} d\omega - \frac{2r \frac{W}{\cos \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega} \sin \omega () d\omega.$$

Dies ergibt

$$\frac{p_r}{P_e} = \frac{1}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)^2} - \frac{2r \frac{W}{\cos \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{1}{2\pi} \frac{t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1}}{\varepsilon^2 + \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right)^2}, \quad (14)$$

oder in der Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{p_r}{P_e} = \frac{1}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \delta \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right) - \frac{2r \frac{W}{\cos \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1}}. \quad (14a)$$

Es tritt also außer einem dem einfallenden Impuls formgleichen Impuls noch ein Teilimpuls auf, der eine Formverzerrung des reflektierten Impulses bedingt. Daß eine solche auftritt, ist von vornherein zu erwarten, da bei der Totalreflexion die \mathfrak{P}_r komplex werden, was eine frequenzunabhängige Phasenverschiebung der Spektralkomponenten des Impulses bedeutet. Dadurch muß sich aber unter allen Umständen die Form des Impulses wesentlich ändern.

Da, wenn wir vorübergehend $t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} = k$ setzen,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\varepsilon^2 + k^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\varepsilon^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} [\ln(t^2 + \varepsilon^2)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

ist, so ergibt sich als Intensität des reflektierten Impulses

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_r dt = \frac{P_e}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}. \quad (15)$$

Der Impuls wird also seiner Intensität nach durchaus nicht total reflektiert! Formel (14) liefert natürlich für den Winkel der Totalreflexion, für den $W = 0$ ist, dieselben Werte wie Formel (12).

Wie sieht nun die im zweiten Medium auftretende Erregung aus?

Es wird

$$\frac{p_d}{P_e} \frac{r}{r - i \frac{W}{\cos \varphi}} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - \omega x \frac{W}{c_1}} e^{i \omega \left(t - \frac{y \sin \chi}{c_1} \right)} d\gamma + \frac{r}{r + i \frac{W}{\cos \varphi}} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \omega - \omega x \frac{W}{c_1}} e^{-i \omega \left(\right)} d\gamma.$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} e^{-h \omega} e^{i k \omega} d\gamma = \frac{1}{h - i k}.$$

Daher wird, wenn wir vorübergehend

$$\varepsilon + x \frac{W}{c_2} = \varepsilon + x \gamma = h$$

und

$$t - y \frac{\sin \chi}{c_2} = t - y \frac{\sin \varphi}{c_1} = t - \tau = k$$

setzen:

$$\frac{p_d}{P_e} = \frac{r}{2\pi} \left(\frac{1}{r - i \frac{W}{\cos \varphi}} \cdot \frac{1}{h - i k} + \frac{1}{r + i \frac{W}{\cos \varphi}} \cdot \frac{1}{h + i k} \right) = \frac{r}{2\pi} \frac{2hr - 2k \frac{W}{\cos \varphi}}{\left(r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi} \right) (h^2 + k^2)}.$$

Führen wir hierin die Koordinaten und die Zeit wieder ein, so kommt schließlich

$$p_d = P_e \frac{1}{\pi} \frac{r}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \cdot \frac{(\varepsilon + x \gamma) r - (t - \tau) \frac{W}{\cos \varphi}}{(\varepsilon + x \gamma)^2 + (t - \tau)^2}, \quad (16)$$

oder in der Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$p_d = P_e \frac{1}{\pi} \frac{r}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \cdot \frac{x\gamma r - (t-\tau) \frac{W}{\cos \varphi}}{x^2 \gamma^2 - (t-\tau)^2} \quad (16a)$$

Diese Formeln stellen nun ebenfalls einen Impuls von völlig anderer Gestalt dar als der auftreffende. Er pflanzt sich in Richtung der y -Achse mit derselben Geschwindigkeit fort, mit der sich die Spur des einfallenden Impulses fortpflanzt. τ ist die zugehörige Laufzeit.

Da

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\varepsilon + x\gamma) r - (t-\tau) b}{(\varepsilon + x\gamma)^2 + (t-\tau)^2} dt &= r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon + x\gamma}{(\varepsilon + x\gamma)^2 + (t-\tau)^2} dt - b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-\tau}{(\varepsilon + x\gamma)^2 + (t-\tau)^2} dt \\ &= r \left[\arctan \frac{t-\tau}{\varepsilon + x\gamma} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{b}{2} [\ln(t-\tau^2 + \varepsilon + x\gamma^2)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi r, \end{aligned}$$

so ist die Intensität des Impulses im zweiten Medium

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_d dt = P_e \frac{r^2}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \quad (17)$$

Es ist sehr überraschend, daß auch dieser Wert vom Ort ganz unabhängig ist, während doch p_d mit wachsendem x stark abnimmt.

Für den Winkel der Totalreflexion ($W=0$) liefert Formel (16) den gleichen Wert wie Formel (13)

$$p_d = P_e \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (t-\tau)^2}.$$

Aus den Formeln (15) und (17) folgt, daß auch im Falle der Totalreflexion die Impulsbilanz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_s dt + \int_{-\infty}^{+\infty} p_r dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a dt$$

gilt, wobei es auch hier ganz gleichgültig ist, an welchen Orten in den betreffenden Medien die Drucke gemessen werden.

Als Zahlenbeispiel betrachten wir die Reflexion in Luft gegen Wasserstoff. Die Daten sind (bei 20° C und 760 Torr)

	c in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	ρ in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	μ in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$
1. Luft.....	34300	0,001205	41,3
2. Wasserstoff	130500	0,0000838	10,9

Hieraus ergibt sich ein Winkel der Totalreflexion von $15,25^\circ$.

Wir setzen nun beispielsweise $\varphi = 60^\circ$. Hieraus ergibt sich für kontinuierliche Wellen eine Eindringtiefe von

$$x_0 = \frac{\lambda_2}{19,6}.$$

Betrachten wir nun einen Einheitsimpuls ($\varepsilon = 0$) und legen den Koordinatenursprung in den Punkt, den er zur Zeit $t = 0$ erreicht, so ergibt Formel (16a) nach Einsetzung aller Zahlenwerte für die Erregung im zweiten Medium

$$\frac{p_a}{P_0} \cdot z_1 = 0,11 \frac{\cos^2 \theta}{x} + 2,49 \frac{\sin^2 \theta}{y},$$

wobei

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

Für den reflektierten Impuls ergibt sich nach Formel (14a)

$$\frac{p_r}{P_0} \cdot z_1 = -z_2 \cdot \delta \left(0 - \frac{0,5x - 0,865y}{c_1} \right) + 2,49 \cdot \frac{1}{y - 0,577x}.$$

z_1 und z_2 sind positive Zahlen.

In den Abb. 2 bis 5 sind Schnitte um die gesamte Erregung in der Umgebung des Koordinatenursprungs parallel zur x - und y -Achse gelegt.

Abb. 2 zeigt das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, daß eine gewisse Erregung dem Impuls im zweiten Medium dauernd vorausläuft. Es ist dies aber eine notwendige Folge der Gestaltveränderung des Impulses. Aus Kontinuitätsgründen muß mit dieser stark abklingenden vorauslaufenden Grenzwellen im zweiten Medium auch eine solche im ersten Medium gekoppelt sein, die ihrerseits eine Folge der Gestaltveränderung des reflektierten Impulses ist. Dies zeigt das in Abb. 2 gezeichnete Beispiel auch deutlich. Die Druckverteilung hat in der Grenze ($x = 0$) einen Knick, aber keinen Sprung. Die gesamte Grenzwellen pflanzt sich beiderseitig mit der Geschwindigkeit der Spur der einfallenden Welle fort.

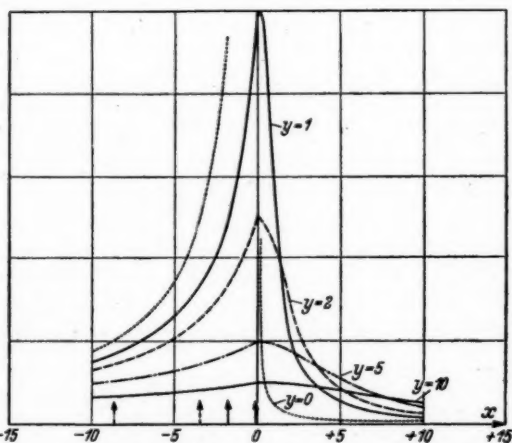


Abb. 2. Zur Totalreflexion eines Einheitsimpulses (Zahlenbeispiel). Druckverlauf in Ebenen $y = + \text{const}$

Die gesamte Grenzwellen pflanzt sich beiderseitig mit der Geschwindigkeit der Spur der einfallenden Welle fort.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei betont, daß diese Erscheinung nichts mit der v. Schmidtschen Kopfwelle³⁾ zu tun hat. Diese tritt bekanntlich nur bei

³⁾ Oswald v. Schmidt, Über Knallwellenausbreitung in Flüssigkeiten und festen Körpern. Z. techn. Physik 19, 554—561 (1938).

inhomogenen Wellen auf. Faßt man aber die hier betrachteten ebenen homogenen Wellen als Kugelwellen mit unendlich weit entferntem Zentrum auf, so kann man sagen, daß hier die v. Schmidtsche Kopfwellen bereits vor unendlich langer Zeit durchgelaufen ist.

Die auf der x -Achse der Abb. 2 senkrecht stehenden kurzen Pfeile markieren die Linien, in denen der eintreffende Impuls unsere Ebenen durchschneidet.

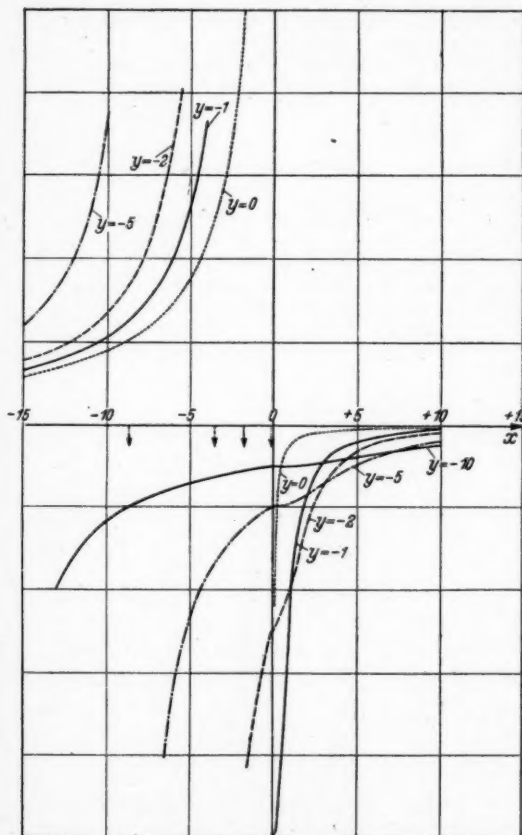


Abb. 3. Zur Totalreflexion eines Einheitsimpulses (Zahlenbeispiel). Druckverlauf in Ebenen $y = -\text{const}$

Hierbei sind die relativen Intensitäten durch die Formeln

$$P_r = P_e \cdot \frac{r - \frac{\cos x}{\cos \varphi}}{r + \frac{\cos x}{\cos \varphi}}$$

Abb. 3 zeigt die entsprechenden Schnitte für negative y -Werte. Hier bedeuten die auf der x -Achse senkrecht stehenden Pfeile die durch das erste Glied der Formel (14a) gegebenen reflektierten Einheitsimpulse. Sie sind hier nach unten gerichtet, da in unserem Zahlenbeispiel das negative Zeichen auftritt.

Die gleiche Bedeutung haben die Pfeile in Abb. 5.

Abb. 4 zeigt deutlich, wie im zweiten Medium dem eintreffenden Impuls eine Überdruckerregung voraus- und eine Unterdruckerregung nachläuft. Ganz grob gesprochen, kann man diese Erscheinung als ein Vor- und Zurückfedern des zweiten Mediums bezeichnen.

Zusammenfassend können wir also folgendes feststellen:

Im Falle der normalen Reflexion wird bei einem einfallenden Einheitsimpuls sowohl ein Einheitsimpuls reflektiert, als auch ein solcher durchgelassen.

und

$$P_d = P_e \cdot \frac{2r}{r + \frac{\cos x}{\cos \varphi}}$$

gegeben.

Für einen einfallenden Impuls beliebiger Gestalt folgt hieraus, daß sowohl der reflektierte, als auch der durchgelassene die gleiche Form wie der einfallende besitzen.

Im Falle der totalen Reflexion, in dem auch im zweiten Medium ein Impuls auftritt, weicht sowohl die zeitliche und räumliche Gestalt dieses Impulses, als auch die Gestalt des reflektierten Impulses von der Gestalt des einfallenden Impulses ab. Dies hat seinen Grund darin, daß infolge der Reflexionsbedingungen die einzelnen Spektralkomponenten dieser Impulse eine für alle Frequenzen gleiche Phasenverschiebung erhalten.

Während der Impuls im zweiten Medium rasch abklingt, behält der reflektierte Impuls seine Gestalt bei seinem Lauf durch das erste Medium bei.

Setzt man

$$p_e = \frac{P_e}{2} \delta \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} \right),$$

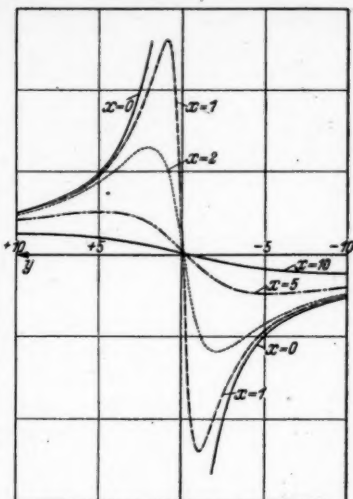


Abb. 4. Zur Totalreflexion eines Einheitsimpulses (Zahlenbeispiel). Druckverlauf in Ebenen $x = + \text{const}$

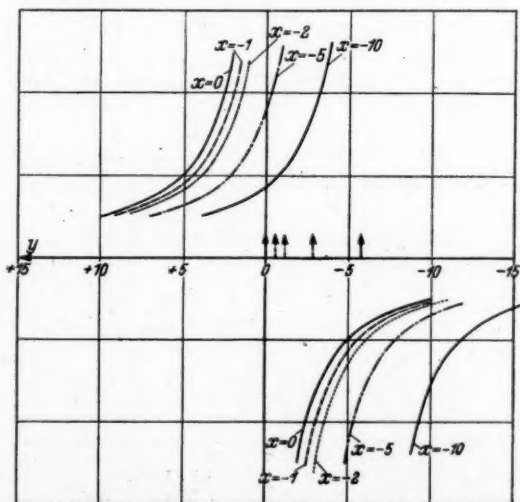


Abb. 5. Zur Totalreflexion eines Einheitsimpulses (Zahlenbeispiel). Druckverlauf in Ebenen $x = - \text{const}$

so wird

$$\frac{p_r}{P_s} = \frac{1}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \delta \left(t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1} \right) - \frac{r \frac{W}{\cos \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{t + \frac{x \cos \varphi - y \sin \varphi}{c_1}}$$

und

$$\frac{p_d}{P_s} = \frac{1}{\pi} \frac{r}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{x \gamma r - (t - \tau) \frac{W}{\cos \varphi}}{x^2 \gamma^2 + (t - \tau)^2}$$

Hierbei ist abkürzend gesetzt

$$W = + \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1}$$

$$\gamma = \frac{W}{c_2}$$

$$\tau = y \frac{\sin \varphi}{c_1}$$

Die Intensität eines totalreflektierten Einheitsimpulses ist nicht gleich 1, sondern hängt vom Einfallswinkel und den Konstanten der Medien ab nach der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_r dt = \frac{P_s}{2} \frac{r^2 - \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}{r^2 + \frac{W^2}{\cos^2 \varphi}}$$

Unabhängig von den Reflexionsbedingungen (normal oder total) gilt die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_s dt + \int_{-\infty}^{+\infty} p_r dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_d dt,$$

wobei die einzelnen Drucke in ganz beliebigen Aufpunkten der betreffenden Medien gemessen werden können.

Bredeneek bei Preetz (Holstein), Entwicklungsgruppe im Post- und Fernmeldetechnischen Zentralamt des amerikanischen und britischen Besatzungsgebiets.

(Bei der Redaktion eingegangen am 18. Juli 1947.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74

für den Verlag: Hofrat Dr. Arthur Meiner, Leipzig C 1, Salomonstraße 18 B

für den Anzeigenteil: Kurt Klimmer (Arbeitsgemeinschaft medizinischer

Verlage G. m. b. H.), Berlin SW 68, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 42 30 97

(1) Paul Dünnhaupt, Köthen L 141

Lizenz-Nr. 410 / G. N. 84